

高等数学竞赛教程

(第四版)

主编 卢兴江 金蒙伟

编委 卢兴江 李银飞

李 珏 钱 春

李丹



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学竞赛教程 / 卢兴江, 金蒙伟主编. —4 版. —杭州:
浙江大学出版社, 2007.12(2011.3 重印)
ISBN 978-7-308-05658-8

I. 高... II. ①卢... ②金... III. 高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 182370 号

高等数学竞赛教程

卢兴江 金蒙伟 主 编

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州星云光电图文制作工作室

印 刷 杭州浙大同济教育彩印有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 15.5

字 数 320 千

版 印 次 2011 年 3 月第 4 版 2011 年 3 月第 6 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-05658-8

定 价 25.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

序

浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛是浙江省高等数学教育研究会主办的面向浙江省大学生的群众性科技活动,旨在激发大学生学习数学的积极性,提高学生运用数学知识解决问题的能力,培养学生的创新思维,推动大学数学教学体系、教学内容和方法的改革。

自2002年开赛以来连续举办了九届,参赛人数逐年增加。目前每年参赛学校40余所,参赛人数已超过万人。该赛事为一群众性科技活动,深受学生欢迎。几年来,各参赛单位一直希望出版适当的参考资料,因国内微积分教学参考资料很多,大多数是针对教材编写的,不适合作为参赛的指导书。为满足参赛学校和人员的复习要求,特编写了此书。

本书是一本参赛的指导书,同时也是一本学习微积分的复习书。我们对微积分的内容进行整理归纳出知识要点,并通过典型例题的解法分析加以综合,使读者对微积分的每个知识点得以融会贯通。每讲后还配了一定的练习题及参考答案,并附有历年的竞赛题和试卷评析。当前,我国从小学到高中都是围绕着升学的指标指挥棒转,学习为应试,其结果是:会套模式解题,不会尝试分析解决问题,长期的教育熏陶,使人形成了思维惯性。我们希望通过数学竞赛,通过本书的学习,能慢慢改变你的思维方式。数学需要运算能力、空间想象能力和抽象思维能力等,做习题对学好数学是重要的,在做运算难度大、步骤长及需要技巧的数学题的过程中有时最能获得数学知识,最能培养分析问题、解决问题的能力。看书和动手解题相结合必能使你学会如何去理解数学知识、如何去分析推理,从而对背景和题型稍新的数学问题不再束手无策,最终培养自己的数学思想,提高自身的数学基本素养,使自己成为具有分析解决问题的创新型人才。

本书第一讲由卢兴江(浙江大学数学系)编写,第二讲和第十四讲由钱春(浙江工商大学统计学院)编写,第三讲至第六讲由李银飞(浙江工商大学统计学院)编写,第七讲至第十三讲由李珏(浙江工商大学统计学院)编写。由卢兴江、金蒙伟统稿。

由于时间仓促,水平有限,编写中难免存在不当和错误之处,请读者批评指正,编者表示万分感谢!

金蒙伟

2011年3月15日

目 录

第一讲 极 限	(1)答案(189)
第二讲 连续、导数及其应用	(20)答案(189)
第三讲 不定积分	(47)答案(191)
第四讲 定积分	(58)答案(192)
第五讲 无穷级数	(75)答案(193)
第六讲 向量运算和空间解析几何	(89)答案(193)
第七讲 多元函数的可微性与偏导数	(96)答案(194)
第八讲 隐函数的微分法	(106)答案(195)
第九讲 极值问题	(116)答案(195)
第十讲 重积分	(127)答案(196)
第十一讲 曲线积分	(141)答案(196)
第十二讲 曲面积分	(153)答案(197)
第十三讲 场论初步	(165)答案(197)
第十四讲 历届试题	(167)答案(197)
浙江省首届高等数学(微积分)竞赛试题	(167)答案(197)
2003 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题	
1. (数学类)	(168)答案(199)
2. (工科类)	(168)答案(202)
3. (经管类)	(169)答案(202)
4. (文科与专科类)	(170)答案(203)
2004 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题	
1. (数学类)	(171)答案(203)
2. (工科类)	(171)答案(206)
3. (经管类)	(172)答案(206)
4. (文科与专科类)	(173)答案(208)

2005 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (174)答案(209)
2. (工科类) (175)答案(212)
3. (经管类) (176)答案(213)
4. (文科与专科类) (177)答案(214)

2006 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (178)答案(215)
2. (工科类) (178)答案(216)
3. (经管类) (179)答案(217)
4. (文科与专科类) (180)答案(218)

2007 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (181)答案(219)
2. (工科类) (182)答案(220)
3. (经管类) (183)答案(221)
4. (文科与专科类) (184)答案(222)

2008 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (185)答案(223)
2. (工科类) (186)答案(225)
3. (经管类) (187)答案(225)
4. (文科与专科类) (187)答案(226)

2009 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (189)答案(231)
2. (工科类) (190)答案(232)
3. (经管类) (191)答案(233)
4. (文科与专科类) (191)答案(234)

2010 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题

1. (数学类) (193)答案(239)
2. (工科类) (194)答案(240)
3. (经管类) (194)答案(241)
4. (文科与专科类) (195)答案(241)

练习题参考答案及历届试题评析 (197)

第一讲 极限



知识要点

(一) 数列极限

1. 数列极限的定义: 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数列. 如果存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得对任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \epsilon,$$

则称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记作:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

有极限的数列称为是收敛的, 否则称为是发散的.

2. 数列极限的性质:

(1) 唯一性: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限是唯一的.

(2) 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

(3) 保号性: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 若 $a > 0$, 则存在正整数 N 及正数 η , 当 $n > N$ 时, $a_n > \eta > 0$.

(4) 夹逼性: 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

3. 数列极限的四则运算: 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 皆收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则有:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k a$ (k 为常数).

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

4. 柯西 (Cauchy) 序列: 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的数列. 如果对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < \epsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 是柯西序列.

$\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 为柯西序列.

5. 单调数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 有界.

6. 子数列及其性质:

(1) 定义: 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的数列, $\{n_k\}$ 是正整数 $\mathbf{Z}^+$ 的无限子集, 且满足 $n_1 < n_2 < \dots$

$< n_k < \dots$, 则称 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子数列.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 的任意一个子数列收敛.

(3) 设 $\{a_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数列, 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 存在收敛的子数列.

(二) 函数极限

1. 函数极限的定义:

(1) 设 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, D 为 $\mathbf{R}$ 的子集且包含 x_0 的某个去心邻域 $U^0(x_0, \delta_0)$ ($\delta_0 > 0$) 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U^0(x_0, \delta) \cap D$ 时, 即 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的极限. 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

如果 $D \supset (x_0 - \delta, x_0)$, 且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$, 即 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处有左极限 A . 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

如果 $D \supset (x_0, x_0 + \delta)$, 且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$, 即 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处有右极限 A . 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

f 在 x_0 处的左、右极限有时分别记为 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$.

(2) 设 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, D 为 $\mathbf{R}$ 的子集. $A \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$,

如果 $D \supset (a, +\infty)$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x \in (X, +\infty) \cap D$ 时, 即 $x > X$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋向于 $+\infty$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty).$$

如果 $D \supset (-\infty, a)$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x \in (-\infty, -X) \cap D$ 时, 即 $x < -X$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋向于 $-\infty$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty).$$

如果 $D \supset (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, 且对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x \in (-\infty, -X) \cup (X, +\infty)$ 时, 即 $|x| > X$ 时,

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋向于 ∞ 时的极限. 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

2. 函数极限的性质:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

(2) 唯一性: 若 f 在 x_0 处有极限, 则极限是唯一的.

(3) 局部有界性: 若 f 在 x_0 处有极限, 则 f 在 x_0 的某邻域内有界.

(4) 局部保号性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 若 $A > 0$, 则存在某正数 $\eta > 0$ 和 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0, \delta_0)$, 使得当 $x \in U^0(x_0, \delta_0)$ 时,

$$f(x) > \eta > 0.$$

(5) 夹逼性: 设函数 f, h, g 在 x_0 的某邻域内满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A, \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

3. 归结原理: $f: D \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, D 包含 x_0 的某个邻域, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 对任意满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, x_n \neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$, 其对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

4. 函数极限的四则运算: 设 $f, g: \mathbf{R} \supset D \rightarrow \mathbf{R}$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = kA (k \text{ 为常数}).$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

以上 2., 3. 和 4. 对 x 趋向于 ∞ 时 (包括正、负无穷大) 也有相应的结论.

5. 几个常用极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 特别, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$



例题分析

以下针对不同的求极限方法进行举例分析,从而了解各方法的特点以及求解相关极限的要领.

(一) 用定义证明极限

例 1.1 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2n} = 2$.

证明 要使 $\left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2n} - 2 \right| < \epsilon$ 成立, 因为

$$\left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2n} - 2 \right| = \left| \frac{4n - 3}{n^2 + 2n} \right| < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}, \text{ 所以只要 } \frac{4}{n} < \epsilon \text{ 即可,}$$

即 $n > \frac{4}{\epsilon}$, 取 $N = \left[\frac{4}{\epsilon} \right]$. 有

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{4}{\epsilon} \right], \text{ 当 } n > N \text{ 时, } \left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2n} - 2 \right| < \frac{4}{n} < \epsilon \text{ 成立.}$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2n} = 2$.

例 1.2 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0$, 其中 k 为正整数.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 要找正整数 N , 使当 $n > N$ 时, $\left| \frac{k^n}{n!} - 0 \right| < \epsilon$. 因为

$$\left| \frac{k^n}{n!} - 0 \right| = \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdots \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \cdots \frac{k}{n} < \frac{k^k}{k!} \cdot \frac{k^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} \triangleq C \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^{n-k}.$$

其中 $C = \frac{k^k}{k!}$, $n > k$. 所以只要 $C \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^{n-k} < \epsilon$ 即可, 也就是 $n > \frac{\ln \frac{\epsilon}{C}}{\ln \frac{k}{k+1}} + k$,

取 $N = \max \left\{ \left\lceil \frac{\ln \frac{\epsilon}{C}}{\ln \frac{k}{k+1}} + k \right\rceil, k \right\}$, 有 $\forall \epsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{k^n}{n!} - 0 \right| < \epsilon$ 成立, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0.$$

例 1.3 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 要找正数 δ , 使当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$.

因为 $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x|$, 所以只需取 $\delta = \epsilon$, 即有

$\forall \epsilon > 0$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x - 0| < \delta = \epsilon$ 成立, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

例 1.4 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} = \frac{1}{8}$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 要找正数 δ , 使当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} - \frac{1}{8} \right| < \epsilon$.

因为 $\left| \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} - \frac{1}{8} \right| = \left| \frac{5(x-1)^2}{8(3x^2 + 2x - 5)} \right| = \left| \frac{5(x-1)}{8(3x+5)} \right|$, 限制 $|x-1| < 1$,

有 $0 < x < 2$, 那么

$$\left| \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} - \frac{1}{8} \right| = \left| \frac{5(x-1)}{8(3x+5)} \right| < \frac{5}{8} \cdot \frac{|x-1|}{5} = \frac{|x-1|}{8},$$

所以可取 $\delta = \min(8\epsilon, 1)$, 即有

$\forall \epsilon > 0$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} - \frac{1}{8} \right| < \epsilon$ 成立, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{3x^2 + 2x - 5} = \frac{1}{8}.$$

例 1.5 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 30}) = 0$.

证明 $|x - \sqrt{x^2 - 30} - 0| = \left| \frac{30}{x + \sqrt{x^2 - 30}} \right|$.

因为 $x \rightarrow +\infty$, 所以限制 $x > 5$, 有

$$|x - \sqrt{x^2 - 30} - 0| = \frac{30}{x + \sqrt{x^2 - 30}} < \frac{30}{x},$$

所以取 $X = \max\left(\frac{30}{\epsilon}, 5\right)$, 有

$\forall \epsilon > 0$, 当 $x > X$ 时, $|x - \sqrt{x^2 - 30} - 0| < \frac{30}{x} < \epsilon$ 成立, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 30}) = 0.$$

(二) 利用夹逼性求极限

例 1.6 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{3n\pi}{4n+3}$.

解 因为 $\sin \frac{3\pi}{4} < \sin \frac{3n\pi}{4n+3} \leq \sin \frac{6\pi}{11}$, 所以 $\sin^n \frac{3\pi}{4} < \sin^n \frac{3n\pi}{4n+3} \leq \sin^n \frac{6\pi}{11}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{3\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{6\pi}{11} = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{3n\pi}{4n+3} = 0$.

例 1.7 求: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n})$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

解 (1) 因为 $\frac{1}{n} (1 + 1 + \cdots + 1) < \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}) < \frac{1}{n} \cdot (\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n} + \cdots + \sqrt[n]{n})$,

即 $1 < \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}) < \sqrt[n]{n}$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}) = 1.$$

(2) 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

例 1.8 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}$.

解 设 $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$, 则有

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} < u_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

将不等式同乘以 u_n 得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} < u_n^2 < \frac{1}{2n+1},$$

即有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} = 0.$$

例 1.9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5} \cdot \left[\frac{3}{x} \right]$, 其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

解 先考虑 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{5} \left[\frac{3}{x} \right]$. 设 $\left[\frac{3}{x} \right] = n$, 则 $x \rightarrow 0^+$ 有 $n \rightarrow \infty$,

且 $n \leq \frac{3}{x} < n+1$, 即 $nx \leq 3 < (n+1)x$, 所以有

$$\frac{3n}{5(n+1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{n+1} \cdot \left[\frac{3}{x} \right] < \frac{x}{5} \left[\frac{3}{x} \right] \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{n} \cdot \left[\frac{3}{x} \right] = \frac{3}{5},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5(n+1)} = \frac{3}{5}$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{5} \left[\frac{3}{x} \right] = \frac{3}{5}$.

同理可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{5} \left[\frac{3}{x} \right] = \frac{3}{5}$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5} \left[\frac{3}{x} \right] = \frac{3}{5}.$$

(三) 利用两个常用极限求相关极限

两个最常用的极限为:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

例 1.10 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

例 1.11 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \right]^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - 1} \cdot n^2 (\cos \frac{\pi}{n} - 1)} \end{aligned}$$

$$\text{因为} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\sin \frac{\pi}{2n} \right)^2}{\frac{1}{n^2}} = - \frac{\pi^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2 = - \frac{\pi^2}{2}, \text{ 所以,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2} = e^{-\frac{\pi^2}{2}}.$$

例 1.12 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^{2x} = \frac{1}{e}$, 求常数 a .

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2a}{x-a} \right]^{\frac{x-a}{2a} \cdot \frac{4ax}{x-a}} = e^{4a}$$

$$\text{由 } e^{4a} = \frac{1}{e} \text{ 得 } a = -\frac{1}{4}.$$

(四) 用洛必达法则求极限

例 1.13 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

$$\text{解} \quad \text{设 } y = \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x, \text{ 则 } \ln y = x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right).$$

令 $\frac{1}{x} = t$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2t + \cos t)}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\cos 2t - \sin t}{\sin 2t + \cos t} = 2,$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2.$$

例 1.14 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} + (1+x)^{\frac{1}{x}} \ln(1+x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(1+x)(2+6x)} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

例 1.15 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6} \right]$.

解 将数列的极限化为函数的极限来求, 所以先考察极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right].$$

设 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0^+$, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1-t+\frac{1}{2}t^2)e^t - \sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(-1+t)e^t + \left(1-t + \frac{t^2}{2}\right)e^t - \frac{6t^5}{2\sqrt{1+t^6}}}{3t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^t - \frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

所以,由归结原理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6} \right] = \frac{1}{6}.$$

例 1.16 求 $I_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n e^{\frac{1}{x^2}}}$, n 为正整数.

$$\text{解 } I_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-n \cdot x^{-n-1}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-(n-2)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{(-n+4)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \dots$$

所以,当 n 为偶数时: $I_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$;

当 n 为奇数时: $I_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$.

因此, $I_n = 0$.

(五) 用等价无穷小替换求极限

当 $x \rightarrow 0$ 时,常用的等价无穷小有:

(i) $e^x - 1 \sim x$;

(ii) $\ln(1+x) \sim x$;

(iii) $\sin x \sim x$;

(iv) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

(v) $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

例 1.17 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x^3)}{(e^{2x}-1)^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^3}{(2x)^2 \cdot x} = -\frac{3}{4}.$$

例 1.18 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{[\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}][x \ln(1+x) - x^2]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}) \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x [\ln(1+x) - x]} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2} x^2}{x \cdot [\ln(1+x) - x]} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+x) - x} \\
 &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

例 1.19 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 3)^a - x] = b \neq 0$, 求 a, b 的值.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^5 + 7x^4 + 3)^a - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{5a} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^5} \right)^a - x \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left[x^{5a-1} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^5} \right)^a - 1 \right] = b \neq 0.
 \end{aligned}$$

所以 $5a - 1 = 0$, 得 $a = \frac{1}{5}$, 从而有

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^5} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{7}{x} + \frac{3}{x^5} \right) = \frac{7}{5}.$$

即得: $a = \frac{1}{5}, b = \frac{7}{5}$.

例 1.20 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$.

$$\text{解} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln 2^x + \ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right) \right] \cdot \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \cdot x \ln 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{2^x} = 3 \ln 2.$$

(六) 用泰勒公式(带皮亚诺余项)求极限

用等价无穷小求极限其实就是用低阶的泰勒公式求极限,但常常需要用更高阶的泰勒公式来求某些极限.

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点具有 n 阶导数,则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的泰勒公式为:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
 &\quad + o((x-x_0)^n), x \rightarrow x_0.
 \end{aligned}$$

特别,当 $x_0 = 0$ 时,上述公式称为 $f(x)$ 的马克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

例 1.21 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

解 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} - x(1 - \frac{x^2}{2!}) + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!})x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

例 1.22 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x - e^{x^2})}$.

解 $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), x \rightarrow 0$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

代入得:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x - e^{x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - 2 - x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^2[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) - 1 - x^2 - o(x^2)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 1.23 试确定当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[5]{x}}$ 关于 x 的阶.

解 $f(x) = (x^2 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}} - (x^2 + x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{15}}[(1 + x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{5}} - (1 + x^{\frac{9}{5}})^{\frac{1}{3}}]$

$$= x^{\frac{1}{15}}\left[1 + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + o(x^{\frac{5}{3}}) - \left(1 + \frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}} + o(x^{\frac{9}{5}})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}} + o(x^{\frac{26}{15}}) - \frac{1}{3}x^{\frac{28}{15}} + o(x^{\frac{28}{15}}) = \frac{1}{5}x^{\frac{26}{15}} + o(x^{\frac{26}{15}}),$$

因此, $f(x)$ 当 $x \rightarrow 0$ 时是关于 x 的 $\frac{26}{15}$ 阶无穷小.

例 1.24 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$,

试求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

解 因为 $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x), x \rightarrow 0$.

$$\sin x = x + o(x^2).$$

代入题中等式得:

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) + x[f(0) + f'(0)x + o(x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(0) + f'(0)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(0)}{x} + f'(0). \end{aligned}$$

所以有: $1 + f(0) = 0$, 得 $f(0) = -1$, 从而得 $f'(0) = 2$.

例 1.25 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (A+Bx+Cx^2)}{x^3} = D \neq 0$. 求常数 A, B, C, D .

解 因为 $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$,

由泰勒公式知: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), x \rightarrow 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

$$\text{可得 } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$$

$$\begin{aligned} &= e \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \right)^3 + o(x^3) \right] \\ &= e \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{21}{48}x^3 + o(x^3) \right] \end{aligned}$$

$$\text{所以有: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e-A) + \left(-\frac{e}{2} - B \right)x + \left(\frac{11e}{24} - C \right)x^2 - \frac{21}{48}x^3 + o(x^3)}{x^3} = D.$$

$$\text{因此得: } \begin{cases} e - A = 0 \\ -\frac{e}{2} - B = 0 \\ \frac{11e}{24} - C = 0 \\ -\frac{21}{48} = D \end{cases} \quad \text{即: } \begin{cases} A = e \\ B = -\frac{e}{2} \\ C = \frac{11e}{24} \\ D = -\frac{21}{48} \end{cases}$$

(七) 用定积分的定义求极限

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f[\xi_i] \cdot \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.1)$$

其中 $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 常取:

$$(i) \xi_i = a + \frac{b-a}{n}(i-1);$$

$$(ii) \xi_i = a + \frac{b-a}{n}i;$$

$$(iii) \xi_i = a + \frac{b-a}{2n}(2i-1).$$

以上即为定积分定义中将积分区间 $[a, b]$ n 等分, 并取介点为子区间的左端点、右端点和中点的情形. 我们常常用 (1.1) 式来求一些特殊极限.

例 1.26 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$

解 设 $a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}.$

此和式可看作函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0, 1]$ 上的定积分的一个黎曼和式. 即将 $[0, 1]$

区间 n 等分, 介点取每个小区间的右端点, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 1.27 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right].$

解 设 $a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}},$ 则有

$$b_n \triangleq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+1} < a_n < \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n} \triangleq c_n.$$

$$\text{即: } b_n = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}, \quad c_n = \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

而和式 $\sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$ 可看作函数 $f(x) = \sin \pi x$ 在 $[0, 1]$ 上的定积分的一个黎曼和式, 将 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 介点取右端点就得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

事实上, 和式 $\sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}$ 也可以看作函数 $g(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的定积分的一个黎曼和式, 将 $[0, \pi]$ 区间 n 等分, 介点取右端点得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{\pi}$, 由夹逼性质知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{\pi}$.

(八) 其他

例 1.28 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

解 考察无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, 设 $u_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 收敛, 因此其通项趋向于 0, 即有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0.$$

例 1.29 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b)] = 0$, 求常数 a, b .

解 设 $\alpha = \sqrt{x^2 + x + 1} - (ax + b)$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha = 0$.

两边同除以 x 取极限得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{x} = 0,$$

即有: $1 - a - 0 = 0$, 得 $a = 1$, 代入得:

$b = \sqrt{x^2 + x + 1} - x - \alpha$, 取极限得:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2}, \text{ 因此}$$

$$a = 1, b = \frac{1}{2}.$$

例 1.30 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2} \right)$ 存在.

证明 设 $a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$, 则对 $\forall m > n$, 有

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+m)}{(n+m)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+m)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

所以, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 对任意的 m , 有 $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$.

因此 $\{a_n\}$ 为柯西序列, 为收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

例 1.31 设 $a_1 \geq -12, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}, n = 1, 2, 3, \cdots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求之.

解 因为 $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 12} - \sqrt{a_{n-1} + 12} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 12} + \sqrt{a_{n-1} + 12}},$

所以 $a_{n+1} - a_n$ 的符号与 $a_n - a_{n-1}$ 的符号相同, 也知与 $a_2 - a_1$ 的符号相同.

$$\text{而 } a_2 - a_1 = \sqrt{12 + a_1} - a_1 = \frac{12 + a_1 - a_1^2}{\sqrt{12 + a_1} + a_1} = \frac{-(a_1 - 4)(a_1 + 3)}{\sqrt{12 + a_1} + a_1}.$$

(1) 若 $a_1 \leq 0$, 则显然 $a_2 > a_1, \{a_n\}$ 单调增加;

(2) 若 $a_1 > 0$, 则

当 $a_1 < 4$ 时, $a_2 > a_1, \{a_n\}$ 单调增加;

当 $a_1 > 4$ 时, $a_2 < a_1, \{a_n\}$ 单调减少;

当 $a_1 = 4$ 时, $a_2 = a_1, a_n = 4, n = 1, 2, 3, \cdots$.

考察

$$a_{n+1} - 4 = \sqrt{a_n + 12} - 4 = \frac{a_n - 4}{\sqrt{a_n + 12} + 4},$$

所以

(1) 当 $a_1 \leq 0$ 或 $0 < a_1 < 4$ 时, $a_n < 4, n = 1, 2, \cdots, \{a_n\}$ 有上界, 且此时 $\{a_n\}$ 单调增

加. 由单调有界数列必有极限的性质知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;

(2) 当 $a_1 > 4$ 时, $a_n > 4, n = 1, 2, \dots, \{a_n\}$ 有下界, 且此时 $\{a_n\}$ 为单调减少, 因此亦必有极限;

(3) 当 $a_1 = 4$ 时, $a_n = 4, n = 1, 2, \dots$, 显然极限存在.

总之可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. 现设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则将 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$ 两边取 $n \rightarrow \infty$ 的极限得:

$$A = \sqrt{A + 12}.$$

解得 $A = -3$ (舍去, 因为 $a_n \geq 0, n = 2, 3, \dots$), $A = 4$.

综上所述, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 极限存在, 为 4.

例 1.32 证明数列 $\left\{1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}\right\} (\alpha > 1)$ 收敛.

证明 显然此数列单调增加, 现证明其有上界.

设 $u_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, 则

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} < 1 + \frac{2}{2^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$u_7 = u_3 + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{4}{4^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2,$$

$$u_{15} = u_7 + \frac{1}{8^\alpha} + \frac{1}{9^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha} < u_7 + \frac{8}{8^\alpha} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3.$$

用数学归纳法易证对正整数 k , 有

$$u_{2^{k-1}} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

因为 $\alpha > 1$, 所以 $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, 由此知 $\{u_n\}$ 的一个子数列 $\{u_{2^{k-1}}\}$ 有上界, 又因 $\{u_n\}$ 是单调增加数列, 所以亦有上界, 于是 $\{u_n\}$ 收敛.

例 1.33 已知 $u_1 > 0, u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}, n = 1, 2, \dots$, 证明 $\{u_n\}$ 极限存在并求之.

解 因为 $u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n} > 3$, 所以有 $u_n > 3, n = 2, 3, \dots$.

又因为

$$0 < |u_{n+1} - 4| = \frac{|4 - u_n|}{u_n} < \frac{1}{3} |4 - u_n| < \frac{1}{3^2} |4 - u_{n-1}| < \dots < \frac{1}{3^n} |u_1 - 4|,$$

而 $|u_1 - 4|$ 为一常数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_1 - 4|}{3^n} = 0$, 由夹逼性质知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - 4| = 0$, 从而得

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4$.

例 1.34 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n, n = 2, 3, \cdots$.

(1) 证明方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 有唯一实根 x_n ;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 (1) $f_n(x)$ 连续, 且 $f_n(0) = 0, f_n(1) = n > 1$, 所以由介值性知 $\exists x_n \in (0, 1)$, 使 $f_n(x_n) = 1, n = 2, 3, \cdots$, 又因为 $f'_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} > 0$, 所以, $f_n(x)$ 严格单调增加, 因此 x_n 是 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, +\infty)$ 内有唯一实根.

(2) 由(1)得, $x_n \in (0, 1), n = 2, 3, \cdots$, 所以 $\{x_n\}$ 有界.

又因为 $f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1}), n = 2, 3, \cdots$,

所以 $x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1}$,

即 $(x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n) - (x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n) = x_{n+1}^{n+1} > 0$,

因此 $x_n > x_{n+1}, n = 2, 3, \cdots$, 即 $\{x_n\}$ 严格单调减少. 于是由单调有界准则知

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$,

由 $x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = 1$, 得 $\frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} = 1$.

因为 $0 < x_n < x_2 < 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$, 于是 $\frac{A}{1 - A} = 1$, 解得: $A = \frac{1}{2}$.

即: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

例 1.35 设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n$, 求证:

(1) 对任意自然数 $n, f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中仅有一根;

(2) 设有 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

证明 (1) 因为 $f_n(x)$ 连续, 又有 $f_n(0) = 1, f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$, 所以由介值定理知

$\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f_n(\xi) = \frac{1}{2}$.

又因为 $f'_n(x) = -n(1 - \cos x)^{n-1} \sin x < 0, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

所以 $f_n(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 严格单调减少, 因此, 满足方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 的根 ξ 是唯一的, 即

$f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中仅有一根.

(2) 因为 $f_n(\arccos \frac{1}{n}) = 1 - (1 - \frac{1}{n})^n$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\arccos \frac{1}{n}) = 1 - e^{-1} > \frac{1}{2}$.

由保号性知, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $f_n(\arccos \frac{1}{n}) > \frac{1}{2} = f_n(x_n)$.

由 $f_n(x)$ 的单调减少性质知 $\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$.

由夹逼性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.



练习

1. 用定义求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 10}} = 1; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \text{ 其中 } a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n+1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数;} \end{cases} \\ (3) \lim_{x \rightarrow x_0} 3^x = 3^{x_0}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1; \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^a = 1. \end{aligned}$$

2. 求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^k} (k \text{ 为常数}); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\cdots+k}; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} (a > 0); \\ (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} (p > 0, a > 0); \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+i}}; \\ (7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{3n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n^2-n^2}} \right); \\ (8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{mx}}{m} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad (9) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}; \\ (10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \cdot \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}; \quad (11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-[x]}{3x+4}; \\ (12) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x^2+1} - \sin x); \quad (13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}; \end{aligned}$$

(14) $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi^2}};$

(15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right].$

3. 设 $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 1} (n = 1, 2, \dots)$, 试证 $\{u_n\}$ 收敛并求其极限.

4. 设 $a \geq 0$, 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n}$ 存在并求其值.

5. 设 $a_1 > 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(a_n^2 + 1)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{ae^{\frac{2}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}} + 1} - \frac{\sin x}{|x|} \right]$ 存在, 求常数 a 的值.

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

8. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\cos \cos \cos \cdots \cos x}_{n \uparrow}$ 存在且其极限是方程 $\cos x - x = 0$ 的根.

9. 设函数 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 又 $F(0) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1 - \cos x)}{\tan(x^2)}$.

10. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + x^n)}{\sqrt{n}}$, 求 $f(x)$ 的定义域.

11. 一点先向东移动 a 米, 然后左拐(向北)移动 aq 米 ($0 < q < 1$), 接着再左拐(向西), 如此不断左拐, 使得后一段移动距离为前一段的 q 倍, 问该点的极限位置与出发点相距多少米?

12. 计算下列极限: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (2n-1)}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n!)^{\frac{1}{n}}$.

13. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!}$.

14. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{a + x_n}{1 + x_n}, n = 1, 2, \dots$, 讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性, 并在收敛时求出其极限, 其中 a 为实数.

15. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 单调减少, 且 $f(x) > 0$. 若 $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$. 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{u_n\}$ 的极限存在.

16. 设数列 $\{x_n\}$ 对一切 n, m 满足 $0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$. 证明数列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 收敛.

17. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$

第二讲 连续、导数及其应用



知识要点

(一) 函数的连续性

1. 定义(连续): 设 $f: \mathbf{R} \supset D \rightarrow \mathbf{R}$, D 包含 x_0 的某个邻域. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处连续.

若 f 在开区间 I 上有定义且在 I 内的每一点都连续, 则称 f 在 I 上连续, 或称 f 是开区间 I 上的连续函数.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处右连续, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处左连续.

如果 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 (a, b) 内连续, 且在 a 处右连续, 在 b 处左连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上连续.

2. 连续函数的四则运算: 设 f 和 g 在 x_0 处连续, 则 $f \pm g$, $f \cdot g$ 和 $\frac{f}{g}$ (此时设 $g(x_0) \neq 0$) 在 x_0 处连续.

3. 复合函数的连续性: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, $y_0 = f(x_0)$ 且 $z = g(y)$ 在 y_0 处连续, 则复合函数 $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 在 x_0 处连续.

4. 反函数的连续性: 如果 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是严格单调增加(减少)的连续函数, 则其反函数 $f^{-1}: f[a, b] \rightarrow [a, b]$ 也是严格单调增加(减少)的连续函数.

5. 初等函数在定义域内是连续函数.

6. 间断点: f 的不连续点称为间断点. 左右极限都存在的间断点称为第一类间断点; 特别, 若在 x_0 处, f 左右极限存在但不相等, 称 x_0 为 f 的跳跃间断点. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但其值不等于 $f(x_0)$ 或 f 在 x_0 处没有定义, 则称 x_0 为 f 的可去间断点. 左右极限至少有一个不存在的点称为第二类间断点.

7. 闭区间上连续函数的性质:

(1) 有界性: 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

(2) 最值性: 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 在 $[a, b]$ 上能取到最大值和最小值.

(3) 介值性: 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, M, m 分别为 f 在 $[a, b]$ 上的最大、最小值, 则对任何

$c \in [m, M]$, 至少存在一个 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$.

推论: 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一个 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(二) 导数及其应用

1. 导数的定义: 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称 f 在 x_0 可导, x_0 为 f 的可导点, 此极限值为 f 在 x_0 处的导数值, 记为 $f'(x_0)$; 也可记为 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $y'|_{x=x_0}$. 即

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

如果 f 在 (a, b) 内的任何一点处均可导, 则称 f 在 (a, b) 上可导, 并称 $f': (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 为 f 在 (a, b) 内的导函数, 简称导数.

设 f 在 x_0 的某个右邻域 $[x_0, x_0 + \delta]$, ($\delta > 0$) 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称 f 在 x_0 处右侧可导, 此极限称为 f 在 x_0 处的右导数, 记为 $f'_+(x_0)$ 或 $f'(x_0 + 0)$, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

类似地, 可定义 f 在 x_0 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 或 $f'(x_0 - 0)$, 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. 若 f 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续, 反之不然.

3. 导数的四则运算: 设 f, g 在 x 处可导, 则

$$(1) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(2) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(3) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0.$$

4. 反函数的导数: 设 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内严格单调、连续, 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则其反函数 $g: f[U(x_0)] \rightarrow U(x_0)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

5. 复合函数的导数(链式法则): 设 g 在 x_0 处可导, f 在 $u_0 = g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f[g(x)]$ 在 x_0 处可导, 且

$$\frac{d(f[g(x)])}{dx} = \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u=u_0} \cdot \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

6. 基本初等函数的导数公式:

(1) $(c)' = 0$, 其中 c 为任一常数.

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$, 其中 a 为任一常数.

(3) $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x,$
 $(\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x.$

(4) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1,$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1,$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

(5) $(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0, a \neq 1)$, 特别 $(e^x)' = e^x.$

(6) $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, (a > 0, a \neq 1)$, 特别: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$

7. 高阶导数: 设 f 的导数 f' 在 x_0 的某邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ 存在,

则称 f 在 x_0 处二阶可导, 此极限值为 f 在 x_0 的二阶导数, 记为 $f''(x_0)$, 也可记为 $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_0}$

等. 同理可定义三阶及以上的导数. 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数, 三阶导数记为 $f'''(x_0)$, n 阶 ($n \geq 4$) 导数记为 $f^{(n)}(x_0)$. 一般的, 对 $y = f(x)$ 有:

$$f^n(x_0) = \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=x_0} = \frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

8. 莱布尼兹 (Leibniz) 公式: 若函数 u 和 v 均 n 阶可导, 则有:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

其中, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

9. 微分的定义: 设 f 在 x_0 的某个邻域内有定义, 如果存在常数 A , 使对充分小的 $|\Delta x|$, 有

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

则称 f 在 x_0 处可微, 其中 $A\Delta x$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0) = A\Delta x.$

10. 函数 f 在 x_0 可微的充分必要条件是 f 在 x_0 处可导, 且当 f 在 x_0 处可微时, 有

$df(x_0) = f'(x_0)dx$. 从而可得微分的四则运算公式及复合函数的微分公式,并可看到一阶微分的形式不变性,即当 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 时,有

$$dy = f'(u)du = f'(g(x)) \cdot g'(x)dx.$$

11. 费尔马(Fermat)定理:设 f 在 x_0 处取到极值,且在 x_0 处可导,则 $f'(x_0) = 0$.

导数为零的点称为驻点. 所以,若 f 在极值点可导,则极值点必为驻点,但反之不然,即驻点不一定为极值点. 另外,导数不存在的点也可能取到极值.

12. 微分中值定理:

(1) 罗尔(Rolle)定理:

设 f 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$,则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 拉格朗日(Lagrange)定理:如果 f 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

推论:若 f' 在 (a, b) 内存在且恒为零,则 f 在 (a, b) 内为常数.

(3) 柯西(Cauchy)定理:设 f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,且 g' 在 (a, b) 内无零点,则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

13. 函数的单调性:

(1) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,则 f 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少)的充分必要条件是

$$f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0), x \in (a, b).$$

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导,则 f 在 $[a, b]$ 上严格单调增加(减少)的充分必要条件是 $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$, 且 f' 的任何部分零点都不能构成区间.

14. 泰勒定理:

(1) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导,则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

其中 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \rightarrow x_0$ 为皮亚诺(Peano)余项.

特别当 $x_0 = 0$ 时,有以下带皮亚诺余项的马克劳林(Maclaurin)公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), x \rightarrow 0.$$

(2) 设 f 在 x_0 处的某邻域内 $n+1$ 阶可导,则对此邻域内的任何一点 x 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, 即 ξ 为 x_0 和 x 之间的一个数. 此时的 $R_n(x)$ 称为拉格朗日余项.

特别, 当 $x_0 = 0$ 时, 即得到带拉格朗日余项的马克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

15. 几个常用的泰勒公式(马克劳林公式)(其中 $0 < \theta < 1$):

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

$$(5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} \cdot x^{n+1} (\alpha \text{ 为常数}).$$

16. 函数极值及判定方法:

(1) 定义: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 若 $\forall x \in U(x_0)$, 恒有 $f(x_0) \leq f(x)$ (或 $f(x_0) \geq f(x)$), 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值(或极大值); x_0 称为 $f(x)$ 的极小值点(或极大值点). 极小值和极大值统称为极值, 极小值点和极大值点统称为极值点.

(2) 判定方法:

(i) 如果 f 在 x_0 的某邻域内连续, f' 在 x_0 的两侧异号, 则 x_0 必为极值点, 也即 $f(x_0)$ 必为极值. 具体地, 若在 x_0 的左侧 $f'(x) \geq 0$, 右侧 $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值; 若在 x_0 的左侧 $f'(x) \leq 0$, 右侧 $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值.

(ii) 设 f 在 x_0 的某邻域内可导, 且在 x_0 处二阶可导. 如果 $f'(x_0) = 0$, 且 $f''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 必为 f 的极值点. 具体地, 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为 f 的极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 f 的极小值点.

(iii) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 则有:

(a) 若 n 为偶数, 则 $f(x_0)$ 必为极值, 且当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值; 当

$f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值.

(b) 若 n 为奇数, 则 $f(x_0)$ 必不是极值.

17. 函数的凹向、拐点及判别方法:

(1) 如果在区间 (a, b) 内的任何一点 x_0 处曲线 $y = f(x)$ 均有切线, 且切线均位于曲线之下, 即

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x), x \in (a, b).$$

则称 f 在 (a, b) 内向上凹 (内凸或下凹); 如果任一点切线位于曲线的上方, 则称 f 在 (a, b) 内向下凹 (内凹或上凸).

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 那么

(a) f 在 $[a, b]$ 向上凹的充分必要条件是 $f'' \geq 0$;

(b) f 在 $[a, b]$ 向下凹的充分必要条件是 $f'' \leq 0$.

(3) 如果连续曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处两侧的凹向不同, 则称 x_0 点为曲线的拐点.

如果 f 在 (a, b) 内二阶可导, 则 $x_0 \in (a, b)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点时, 必有 $f''(x_0) = 0$, 反之不然.

(4) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导 ($n \geq 3$), 满足

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

如果 n 为奇数, 则 x_0 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

如果 n 为偶数, 则 x_0 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

18. 曲率公式: 设 f 二阶可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的曲率为

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

直线的曲率为零, 圆的曲率为 $\frac{1}{R}$ (R 为圆半径).

如果 $k(x) \neq 0$, 则在 $P(x, f(x))$ 的法线 (过 P 点且与 P 点切线垂直的直线) 上曲线凹的一侧取一点 Q , 使 $QP = \frac{1}{k(x)}$, 以 Q 为圆心, 以 $\frac{1}{k(x)}$ 为半径作圆, 此圆称为曲线 $y = f(x)$ 在 P 点的曲率圆, 而 $R = \frac{1}{k(x)}$ 称为曲率半径.

曲率中心 (曲率圆的圆心) (c_x, c_y) 为:

$$\begin{cases} c_x = x - \frac{f'(x)[1 + (f'(x))^2]}{f''(x)} \\ c_y = f(x) + \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)} \end{cases}$$

曲率圆具有以下特点:

- (1) 它与曲线 $y = f(x)$ 在 P 点有相同的切线;
- (2) 在 P 点, 它与曲线 $y = f(x)$ 有相同的曲率;
- (3) 在 P 点, 它与曲线有相同的凹向.



例题分析

例 2.1 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数, 求 a, b 的值.

$$\text{解 因为 } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \\ \frac{a+b+1}{2}, & x = 1 \\ \frac{a-b-1}{2}, & x = -1 \end{cases} \text{ 为连续函数, 所以有:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{a+b+1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{a-b-1}{2},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}, \text{ 解得 } a=0, b=1.$$

例 2.2 分析下列函数的间断点及其类型.

$$(1) y = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}; \quad (2) y = \frac{|x| - x^2}{x(|x| - x^3)}.$$

解 (1) 因为初等函数在其定义域内连续, 所以只要考虑 $x=0$ 点, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

因此在 $x=0$ 处为跳跃间断点.

$$(2) \text{ 因为 } y = \begin{cases} \frac{1}{x(1+x)}, & x > 1 \\ \frac{1}{x(1+x)}, & 0 < x < 1 \\ \frac{1+x}{x(1+x^2)}, & x < 0 \end{cases}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \infty$, 因此 $x = 0$ 为第二类间断点.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \frac{1}{2}$, 因此 $x = 1$ 为第一类间断点(可去间断点).

例 2.3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f(f(x)) = x$, 证明在 $(-\infty, +\infty)$ 内至少存在一个 x_0 , 满足 $f(x_0) = x_0$.

证明 用反证法, 假设 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(x) \neq x$, 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续不为零且不变号, 否则, 若 $\exists x_1, x_2$, 使 $F(x_1) < 0, F(x_2) > 0$. 那么由闭区间上连续函数的介值性可知在 x_1, x_2 之间存在一点 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$, 矛盾.

(1) 若 $\forall x \in (-\infty, +\infty), F(x) > 0$, 即 $f(x) > x$, 则 $F[f(x)] = f(f(x)) - f(x) > 0$, 得

$$f(f(x)) > f(x) > x,$$

这与题设矛盾.

(2) 若 $\forall x \in (-\infty, +\infty), F(x) < 0$, 即 $f(x) < x$, 则同理有 $F[f(x)] = f(f(x)) - f(x) < 0$, 得

$$f(f(x)) < f(x) < x,$$

也与题设矛盾.

因此在 $(-\infty, +\infty)$ 内至少有一个 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$.

例 2.4 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有定义, 且函数 $e^x f(x)$ 与函数 $e^{-f(x)}$ 在 $[0, 1]$ 上都是单调增加的, 求证: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续.

证明 只要证明 $\forall x_0 \in (0, 1)$ 处 f 连续, 可以考察在 x_0 处既为左连续又为右连续.

对 $x \in (0, 1)$, 当 $x_0 < x < 1$ 时, 由 $e^x f(x)$ 和 $e^{-f(x)}$ 的单调性知

$$e^{x_0} f(x_0) \leq e^x f(x), \text{ 即 } e^{x_0-x} f(x_0) \leq f(x).$$

$$e^{-f(x_0)} \leq e^{-f(x)}, \text{ 即有: } f(x_0) \geq f(x).$$

从而得:

$$e^{x_0-x} f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0).$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} e^{x_0-x} f(x_0) = f(x_0)$$

由夹逼性质知

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

同理可得 $(0 < x < x_0)$ 时

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

因此 $f(x)$ 在 $\forall x_0 \in (0, 1)$ 处连续, 即 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续.

例 2.5 证明: 若对任意实数 x, y , 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

证明 由题设, 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 和 Δx , 有

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f(\Delta x).$$

所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x).$$

又因为 $f(0 + \Delta x) = f(0) + f(\Delta x)$, 得 $f(0) = 0$, 且由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0.$$

因此

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

于是 $f(x)$ 在 x 处连续, 由 x 的任意性知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

例 2.6 设 f 在 x_0 处可导, 且 $f(x_0) = a, f'(x_0) = b$, 求下列极限:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k_1 \Delta x) - f(x_0 - k_2 \Delta x)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)}{f(x_0)} \right]^n, f(x_0) \neq 0.$$

解 (1) 由导数的定义得:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k_1 \Delta x) - f(x_0 - k_2 \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k_1 \Delta x) - f(x_0)}{k_1 \Delta x} \cdot k_1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - k_2 \Delta x) - f(x_0)}{-k_2 \Delta x} \cdot k_2 \\ &= k_1 f'(x_0) + k_2 f'(x_0) = b(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot x_0 \right] \\ &= f(x_0) - x_0 f'(x_0) = a - x_0 b. \end{aligned}$$

(3) 先考虑

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + t)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{f(x_0)} \right]^{\frac{1}{t}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{f(x_0)} \right]^{\frac{f(x_0)}{f(x_0+t) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \cdot \frac{1}{f(x_0)}} \\
 &= e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} = e^{\frac{b}{a}}.
 \end{aligned}$$

例 2.7 问 α 取何值时, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 (1) 连续;

(2) 可导; (3) 一阶导数连续?

解 (1) 显然要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 只要考察 $x=0$ 点即可, 也就是要求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0$. 所以有 $\alpha > 0$, 即当 $\alpha > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(2) 显然当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 可导, 且

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}.$$

当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 亦可导, 且 $f'(x) = 0$.

所以只要考察 $x=0$ 点的可导性, 由导数定义知

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{0-0}{\Delta x} = 0.$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(\Delta x)^\alpha \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (\Delta x)^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

因此, 要在 $x=0$ 点可导, 须有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (\Delta x)^{\alpha-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0$.

即要求 $\alpha > 1$, 即当 $\alpha > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导.

(3) 由 (2) 知, 当 $\alpha > 1$ 时, 有

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

所以, 要使 $f'(x)$ 连续, 只需考察在 $x=0$ 点的连续性, 即要求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

易得此时应满足 $\alpha > 2$, 即当 $\alpha > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

例 2.8 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解 此为参数方程求导数, 可利用微分.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln(1+t^2))}{d(\arctan t)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{d(\arctan t)} = \frac{d(2t)}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+t^2).$$

例 2.9 求下列函数的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}; \quad (2) f(x) = (x^2 + x)\cos ax, a > 0.$$

解 (1) 直接求导会很烦琐且找不到规律, 所以对 $f(x)$ 进行变形,

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right),$$

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{(-1)}{(x+3)^2} \right) = \frac{(-1)}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+3)^2} \right),$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{(-1)(-2)}{(x-1)^3} - \frac{(-1)(-2)}{(x+3)^3} \right) = \frac{(-1)^2 2!}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+3)^3} \right),$$

由归纳法易得

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{4} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}} \right].$$

(2) 对低阶的多项式与某容易求得高阶导数的函数相乘的函数求 n 阶导数可利用莱布尼兹公式.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + x)^{(k)} \cdot (\cos ax)^{(n-k)} \\ &= (x^2 + x)(\cos ax)^{(n)} + n(2x + 1)(\cos ax)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2(\cos ax)^{(n-2)} \\ &= a^n (x^2 + x) \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) + na^{n-1} (2x + 1) \cos \left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \\ &\quad + n(n-1)a^{n-2} \cos \left(ax + \frac{(n-2)\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

例 2.10 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解 由 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 得 $(1+x^2)f'(x) = 1$.

等式两边再对 x 求 $(n-1)$ 阶导数, 由莱布尼兹公式得:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + (n-1) \cdot 2x \cdot f^{(n-1)}(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-2)}(x) = 0.$$

所以在 $x = 0$ 点有:

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0), n \geq 2.$$

于是有:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (n-1)!, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

例 2.11 设 $u = f[\varphi(x) + y^2]$, 其中 x, y 满足方程 $y + e^y = x$, 且 $f(x), \varphi(x)$ 均二阶可导, 试求 $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$.

解 $\frac{du}{dx} = f'[\varphi(x) + y^2] \cdot (\varphi'(x) + 2y \cdot \frac{dy}{dx}).$

再对方程 $y + e^y = x$ 两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$$

解得: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+e^y}$, 代入得

$$\frac{du}{dx} = f'[\varphi(x) + y^2] \cdot \left(\varphi'(x) + \frac{2y}{1+e^y} \right).$$

然而: $\frac{d^2u}{dx^2} = f''[\varphi(x) + y^2] \cdot \left(\varphi'(x) + \frac{2y}{1+e^y} \right)^2 + f'[\varphi(x) + y^2] \cdot$

$$\begin{aligned} & \left[\varphi''(x) + 2 \cdot \frac{\frac{dy}{dx} \cdot (1+e^y) - y \cdot e^y \cdot \frac{dy}{dx}}{(1+e^y)^2} \right] \\ &= f''[\varphi(x) + y^2] \cdot \left(\varphi'(x) + \frac{2y}{1+e^y} \right)^2 + f'[\varphi(x) + y^2] \cdot \\ & \quad \left[\varphi''(x) + \frac{2}{(1+e^y)^2} - \frac{2ye^y}{(1+e^y)^3} \right]. \end{aligned}$$

例 2.12 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证:

(1) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$;

(2) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $\eta f(\eta) + f'(\eta) = 0$.

证明 对此类结果的证明, 往往是构造一个函数并对其使用罗尔定理.

(1) 设 $\varphi(x) = xf(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, 由罗尔定理得

存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

(2) 设 $F(x) = e^{\frac{x}{2}} f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理得

存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F'(\eta) = e^{\frac{\eta}{2}} f'(\eta) + e^{\frac{\eta}{2}} \cdot \eta \cdot f(\eta) = 0$, 即 $\eta f(\eta) + f'(\eta) = 0$.

例 2.13 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

证明 因为 $f(a) = f(b)$ 且 $f(x)$ 不恒为常数, 故至少存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) \neq f(a)$.

(1) 若 $f(c) > f(a)$, 则至少 $\exists \xi \in (a, c)$ 使 $f(c) - f(a) = f'(\xi)(c - a)$

即 $f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$.

(2) 若 $f(c) < f(a) = f(b)$, 则至少 $\exists \xi \in (c, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} > 0$.

另证 用反证法. 假设在 (a, b) 内有 $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 单调减少, 所以 $\forall x \in (a, b)$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

而 $f(a) = f(b)$, 因此 $f(x) \equiv f(a)$, 这与 $f(x)$ 不恒为常数矛盾. 于是至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) > 0$.

例 2.14 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证:

(1) 在 (a, b) 内, $g(x) \neq 0$;

(2) 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明 (1) 用反证法. 若存在一点 $\eta \in (a, b)$ 使 $g(\eta) = 0$, 则分别在 $[a, \eta]$ 和 $[\eta, b]$ 上应用罗尔定理得

$\exists \xi_1 \in [a, \eta]$, 使 $g'(\xi_1) = 0$,

$\exists \xi_2 \in [\eta, b]$, 使 $g'(\xi_2) = 0$.

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理得

$\exists \xi_3 \in [\xi_1, \xi_2]$, 使 $g''(\xi_3) = 0$.

这与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾, 所以, 在 (a, b) 内, $g(x) \neq 0$.

(2) 设 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$, 得 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$,

所以由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$f(\xi)g''(\xi) + f'(\xi)g'(\xi) - f'(\xi)g'(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0$.

即: $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

例 2.15 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0, f''(\eta) = 0$.

证明 只要证明了 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$, 就可由罗尔定理容易证得 $\exists \eta \in (a, b)$ 使 $f''(\eta) = 0$.

用反证法. 假设 $f(x)$ 在 (a, b) 内无零点, 则恒有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$, 现不妨设 $f(x) > 0$, 则:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0; f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0.$$

从而得 $f'(a)f'(b) \leq 0$, 矛盾, 于是 $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$.

再由 $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$, 在 $[a, \xi]$ 和 $[\xi, b]$ 分别用罗尔定理得

$\exists \xi_1 \in [a, \xi]$ 使 $f'(\xi_1) = 0$,

$\exists \xi_2 \in [\xi, b]$ 使 $f'(\xi_2) = 0$.

再在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上用罗尔定理得 $\exists \eta \in [\xi_1, \xi_2] \subset (a, b)$, 使

$$f''(\eta) = 0.$$

例 2.16 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内可导, 且

$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0.$$

求证: 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 首先证明 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内必有零点.

因为在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 连续, 且 $\sin x > 0$, 所以, 若 $f(x)$ 无零点, 则恒有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$,

从而有 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx > 0$ 或 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx < 0$, 与题设矛盾.

所以, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内必有零点.

下面证明 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内零点不唯一, 即至少有两个零点.

用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内只有一个零点 x_0 , 则 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 和 (x_0, π) 上取不同的符号 (且不等于零), 否则与 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ 矛盾. 这样, 函数 $\sin(x - x_0)f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 和 (x_0, π) 上取相同的符号, 即恒正或恒负.

那么有: $\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_0) dx \neq 0$. 但是

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin(x - x_0) dx &= \int_0^\pi f(x) [\sin x \cos x_0 - \cos x \sin x_0] dx \\ &= \cos x_0 \int_0^\pi f(x) \sin x dx - \sin x_0 \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0. \end{aligned}$$

从而矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 至少有两个零点. 于是由罗尔定理即得 $\exists \xi \in (0, \pi)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

例 2.17 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.

证明: 在 $[0, 1]$ 上存在两点 $x_1 \neq x_2$, 使 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 所以由区间上连续函数的介值性知:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ 使 } f(\xi) = \frac{1}{2}.$$

由拉格朗日定理可得:

$$f(\xi) - f(0) = f'(x_1)(\xi - 0), \quad 0 < x_1 < \xi;$$

$$f(1) - f(\xi) = f'(x_2)(1 - \xi), \quad \xi < x_2 < 1.$$

也就是在 $[0, 1]$ 上存在 $x_1 \neq x_2$, 使

$$f'(x_1) = \frac{f(\xi)}{\xi}, \quad f'(x_2) = \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi}.$$

于是有

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{\xi}{f(\xi)} + \frac{1 - \xi}{1 - f(\xi)} = 2\xi + 2 - 2\xi = 2.$$

例 2.18 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0, |f'(x)| \leq p|f(x)|$, $0 < p < 1$. 证明: $f(x) \equiv 0, x \in (-\infty, +\infty)$.

证明 先考虑 $x \in [0, 1]$, $f(x)$ 为连续函数且可导. 所以 $|f(x)|$ 也为连续函数, 可取到最大值 M , 设 $x_0 \in [0, 1]$, 有 $f(x_0) = M \geq 0$, 由拉格朗日中值定理有:

$$M = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi)x_0|, \quad \xi \in (0, x_0).$$

于是有:

$$M = |f'(\xi)x_0| \leq |f'(\xi)| \leq p|f(\xi)| \leq pM,$$

即得 $(1 - p)M \leq 0$, 而 $p < 1$.

所以 $M \leq 0$, 因此 $M = 0$, 由此可知

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [0, 1].$$

由 $f(1) = 0$, 再考虑 $[1, 2]$ 上, 同样可得 $f(x) \equiv 0$,

以此类推, 可得当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \equiv 0$,

同理可得当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) \equiv 0$.

例 2.19 设 $f(x), g(x)$ 为有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且有数列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 使 $g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2, \dots$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = g(\xi)$.

证明 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 也是 $[a, b]$ 上的连续函数, 对 $\{x_n\}$, 不妨设 $F(x_1) > 0$. 则:

(1) 若有某个 x_k , 使 $F(x_k) \leq 0$. 那么,

(a) 若 $F(x_k) = 0$, 则命题得证;

(b) 若 $F(x_k) < 0$, 则由介值性知在 x_1 与 x_k 之间至少存在一个 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 从而命题成立.

(2) 若 $\forall x_n, F(x_n) > 0$, 即 $f(x_n) > g(x_n)$.

因为 $g(x_n) = f(x_{n+1}) > g(x_{n+1})$, 所以 $\{g(x_n)\}$ 单调下降.

而 $f(x_{n+1}) = g(x_n) < f(x_n)$, 所以 $\{f(x_n)\}$ 也单调下降.

由闭区间上连续函数的有界性知, $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}$ 有界, 于是由单调有界准则知 $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}$ 极限存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n+1}) \triangleq A.$$

因为 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 所以必须有收敛的子数列, 设 $\{x_n\}$ 的一个收敛子数列为 $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow \xi \in [a, b]$, 则由 $f(x), g(x)$ 的连续性有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) = A = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_{n_k}) = g(\xi).$$

例 2.20 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又

$$f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4.$$

试证: 在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

证明 由拉格朗日公式得

$$f(0) - f(-2) = 2f'(\xi_1), \quad -2 < \xi_1 < 0;$$

$$f(2) - f(0) = 2f'(\xi_2), \quad 0 < \xi_2 < 2.$$

由 $|f(x)| \leq 1$ 知

$$|f'(\xi_1)| = \frac{|f(0) - f(-2)|}{2} \leq 1; \quad |f'(\xi_2)| = \frac{|f(2) - f(0)|}{2} \leq 1.$$

令 $\varphi(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$, 则有 $\varphi(\xi_1) \leq 2, \varphi(\xi_2) \leq 2$.

因为 $\varphi(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 且 $\varphi(0) = 4$. 设 $\varphi(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的最大值在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-2, 2)$ 上取到, 则 $\varphi(\xi) \geq 4$, 且 φ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上可导, 由费马定理有: $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$2f(\xi) \cdot f'(\xi) + 2f'(\xi) \cdot f''(\xi) = 0.$$

因为 $|f(\xi)| \leq 1$, 且 $\varphi(\xi) \geq 4$. 所以 $f'(\xi) \neq 0$, 于是有

$$f(\xi) + f''(\xi) = 0, \quad \xi \in (-2, 2).$$

例 2.21 设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上具有任意阶导数, 且在 $x = 0$ 处所有导数都不等于零, 设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

试求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$.

解 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 点泰勒展开到 n 阶得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta'x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta' < 1.$$

由题设

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

两式相减得:

$$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta'x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

又因为 $f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(\theta_1 \theta x) \cdot \theta x$, $0 < \theta_1 < 1$,

$$\text{代入得: } \frac{f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(\theta_1 \theta x) \theta x}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\theta'x)}{(n+1)!}x,$$

即

$$f^{(n+1)}(\theta_1 \theta x) \cdot \theta = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\theta'x).$$

两边取极限得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(\theta_1 \theta x) \cdot \theta = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n+1)}(\theta'x),$$

$$f^{(n+1)}(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0).$$

因为 $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

例 2.22 设 f 是 $[a, a+2]$ 上的实函数, 且 $|f(x)| \leq 1$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明: $|f'(x)| \leq 2, x \in [a, a+2]$, 并找出一个函数使等式成立.

证明 f 在 $\forall x \in [a, a+2]$ 的泰勒公式为

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(t-x)^2, \quad \xi \in (a, a+2).$$

$$\text{则: } f(a+2) = f(x) + f'(x)(a+2-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2, \quad \xi_1 \in (x, a+2),$$

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2, \quad \xi_2 \in (a, x).$$

两式相减得:

$$f(a+2) - f(a) = 2f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2.$$

所以

$$|f'(x)| = \frac{1}{2} \left| f(a+2) - f(a) - \frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2 \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \left[|f(a+2)| + |f(a)| + \left| \frac{f''(\xi_1)}{2}(a+2-x)^2 \right| + \left| \frac{f''(\xi_2)}{2}(a-x)^2 \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \left[1 + 1 + \frac{1}{2}(a+2-x)^2 + \frac{1}{2}(a-x)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} [2 + 2 + (a-x)^2 + 2(a-x)] \\
&= 2 + \frac{1}{2}(a-x)(a+2-x) \\
&= 2 - \frac{1}{2}(x-a)(a+2-x).
\end{aligned}$$

因为 $a < x < a+2$, 所以

$$|f'(x)| \leq 2, \quad x \in [a, a+2].$$

取 $f(x) = \frac{1}{2}(x-a)^2 - 1$, $x \in [a, a+2]$, 则 $f'(x) = x-a$, $f''(x) = 1$,

且易知 $|f(x)| \leq 1$, 又有 $|f'(x)| \leq 2$.

例 2.23 在数 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ 中求出最大值.

解 先考察连续函数 $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$.

因为 $f'(x) = (e^{\frac{\ln x}{x}})' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \triangleq 0$, 得 $x = e$.

且有: 当 $x < e$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加;

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少.

所以, $f(e)$ 为 $f(x)$ 当 $x > 0$ 的最大值, 而 $2 < e < 3$, 于是所求的最大值必在 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 中取到, 而因为 $2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}}, 3^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}}$, 所以 $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. 即最大值为 $\sqrt[3]{3}$.

例 2.24 求证: 方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根, 其中 p, q 为常数, 且 $0 < q < 1$.

证明 设 $f(x) = x + p + q \cos x$, 因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

所以必存在 a, b 使 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 由介值性知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 至少有一根.

又因为 $f'(x) = 1 - q \sin x > 0$, 所以 $f(x)$ 严格单调增加.

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上只有一个根, 即方程 $x + p + q \cos x = 0$ 恰有一个实根.

例 2.25 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

解 令 $f(x) = kx + \frac{1}{x^2} - 1$, 则 $f'(x) = k - \frac{2}{x^3}, f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$.

所以当 $x > 0$ 时, 有

(1) 当 $k < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 严格单调减少, 而此时

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

因此, 由介值性知 $f(x) = 0$ 有且仅有一个根.

(2) 当 $k = 0$ 时, $f(x) = 0$ 有且仅有一根 $x = 1$.

(3) 当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 $x_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{k}}$, 且为极小值点, 也为最小值点,

由 $f(x) = 0$ 有且仅有一根得 $f(x_0) = 0$, 即

$$k \sqrt[3]{\frac{2}{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{k}\right)^2}} - 1 = 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{2}{9} \sqrt{3}.$$

易知, 当 $k \neq \frac{2}{9} \sqrt{3}$ 时, $f(x) = 0$ 无根或有两个根.

总之, 当 $k = \frac{2}{9} \sqrt{3}$ 或 $k \leq 0$ 时, 方程有且仅有一个解.

例 2.26 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0$, 求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值.

解 令 $t = -\frac{1}{x}$, 代入方程得:

$$3f\left(-\frac{1}{t}\right) + \frac{4}{t^2} f(t) - 7t = 0,$$

$$\text{所以有: } \begin{cases} 3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0, \\ 4f(x) + 3x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) - 7x^3 = 0. \end{cases}$$

解得: $f(x) = 4x^3 + \frac{3}{x}$, 因此有

$$f'(x) = 12x^2 + \frac{3}{x^2} \triangleq 0,$$

得驻点: $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 而 $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 24\sqrt{2} > 0$, $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -24\sqrt{2} < 0$,

所以, $f(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 取极小值 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$.

$f(x)$ 在 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 取极大值 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}$.

例 2.27 求函数 $f(x) = \frac{x(x+2)}{x-1}$ 的渐近线.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 所以无水平渐近线;

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, 所以有垂直渐近线 $x = 1$;

下面求斜渐近线: 设斜渐近线为 $y = kx + b$, 则

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x(x+2)}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

因此斜渐近线为 $y = x + 3$.

例 2.28 过正弦曲线 $y = \sin x$ 上点 $M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处作一抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 使抛物线与正弦曲线在 M 点具有相同的曲率与凹向, 并写出 M 点处两曲线的公共曲率圆方程.

解 曲线 $y = \sin x$ 在 M 处的函数值 $y|_M = 1$, 导数值 $y'|_M = 0$, 二阶导数值 $y''|_M = -1$, 而抛物线在 M 处和 $y = \sin x$ 有相同的曲率与凹向, 所以在 M 处, 正弦曲线和抛物线有相同的函数值、导数值和二阶导数值, 即:

$$\begin{cases} \frac{\pi^2}{4}a + \frac{\pi}{2}b + c = 1, \\ 2a \cdot \frac{\pi}{2} + b = 0, \\ 2a = -1. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{\pi}{2}, \\ c = 1 - \frac{\pi^2}{8}. \end{cases}$$

于是所求抛物线为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

因为在 M 处两曲线的曲率为:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

所以曲率圆半径为 $R = \frac{1}{k} = 1$, 而 $y'|_M = 0$, 于是 M 处的法线为 $x = \frac{\pi}{2}$, 易知曲率

圆圆心为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 即得曲率圆方程为:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

例 2.29 证明 $\frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x > x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

证明 对此类不等式, 常常可利用函数的单调性来证明.

设 $f(x) = \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x - x$, 则有 $f(0) = 0$, 而且

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\sec^2 x + \frac{2}{3}\cos x - 1 \\ &= \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{3\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2(\cos x + 1)}{3\cos^2 x} > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 严格单调增加, 因此当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$,

即: $\frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x > x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

例 2.30 证明 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2, x \in (0, 1)$.

证明 所证不等式等价于 $\frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x) > 0$, 现设

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x), x \in (0, 1).$$

可得: $f(0) = 0$, 又有

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{2(1+x)\sqrt{1+x}} > 0, x \in (0, 1),$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调增加, 因此当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} - \ln(1+x) > 0, x \in (0, 1).$$

从而得证.

例 2.31 试证: 当 $0 < x < \pi$ 时, $e^{-x} + \sin x < 1 + \frac{x^2}{2}$.

证明 设 $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - e^{-x} - \sin x$, 则有 $f'(x) = x + e^{-x} - \cos x$.

因为 $f'(0) = 0$, 且 $f''(x) = 1 - e^{-x} + \sin x > 0, 0 < x < \pi$,

所以, $f'(x)$ 严格单调增加, 于是当 $0 < x < \pi$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$.

从而知 $f(x)$ 严格单调增加, 又有 $f(0) = 0$, 因此

当 $0 < x < \pi$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 得证.

例 2.32 证明: 当 $a > b > e$ 时, $a^b < b^a$.

证明 所证不等式等价于 (两边取对数)

$$\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}.$$

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > e$, 则有

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, x > e.$$

所以, $f(x)$ 当 $x > e$ 时严格单调减少, 因此当 $a > b > e$ 时, $f(a) < f(b)$, 即 $\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$.

于是有: $a^b < b^a, a > b > e$.

例 2.33 证明: $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, x \in [0, 1], p > 1$ 为常数.

证明 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p, x \in [0, 1]$, 则有

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} \triangleq 0,$$

从而得唯一驻点 $x = \frac{1}{2}$, 而 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} + p(p-1)(1-x)^{p-2}, f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$,

所以, $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值, 也即 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最小值, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$,

又易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的最大值为 $f(0) = 1$ 或 $f(1) = 1$,

因此在 $[0, 1]$ 上有 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq f(x) \leq 1$.

即 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.

例 2.34 试证 $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$, 其中 $a > 0, b > 0, p > 1, q > 1$ 为常数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证明 不等式等价于: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, 现令 $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}x + \left(\frac{1}{p} - 1\right)$, 则有:

$$f'(x) = \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(x^{\frac{1}{p}-1} - 1).$$

所以当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增加.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调减少.

因此, $f(1)$ 为 $f(x)$ 的最大值, 而 $f(1) = 0$, 即有 $f(x) \leq f(1) = 0$, 令 $x = \frac{a}{b}$ 即得:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{p} - 1 \leq 0.$$

于是得: $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, a > 0, b > 0, p > 1, q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

例 2.35 设 $f''(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 证明 $f(x) \geq x$.

证明 因为 $f''(x)$ 存在, 所以 $f(x)$ 连续、可导, 又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 得:

$$f(0) = 0, f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

由泰勒公式得:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2, 0 < \theta < 1.$$

而 $f''(\theta x) \geq 0$, 所以 $f(x) \geq x$.

例 2.36 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) > 0$, 证明对任意的 $x_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n$ 有 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$, 其中 $0 < \lambda_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$, 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

证明 记 $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, 易知 $a < \bar{x} < b$, 即 $\bar{x} \in (a, b)$,

由 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 处的泰勒公式得

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \bar{x})^2, \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \bar{x} \text{ 之间}.$$

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{f''(\xi_i)}{2}, \xi_i \text{ 介于 } x_i \text{ 与 } \bar{x} \text{ 之间 } (i = 1, 2, \dots, n).$$

因为 $f''(x) > 0$, 所以有

$$\lambda_i f(x_i) \geq \lambda_i f(\bar{x}) + \lambda_i f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

将此 n 个不等式相加得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f(\bar{x}) \sum_{i=1}^n \lambda_i + f'(\bar{x}) (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n \lambda_i) = f(\bar{x}).$$

$$\text{即: } \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i).$$

例 2.37 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导数存在, 且 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 试证在 $(0, 1)$ 内

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}.$$

证明 f 在 $\forall x \in (0, 1)$ 处的泰勒公式为

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(t - x)^2, \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } t \text{ 之间}.$$

所以有:

$$f(0) = f(x) - f'(x) \cdot x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2, \xi_2 \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

两式相减得:

$$f(1) - f(0) = f'(x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2 - \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,$$

$$|f'(x)| \leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x)^2 + \frac{|f''(\xi_1)|}{2}x^2,$$

$$\leq 2a + \frac{b}{2}[(1-x)^2 + x^2],$$

而在 $(0, 1)$ 内, $0 < (1-x)^2 + x^2 < 1$, 于是有

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}.$$

例 2.38 设 $f''(x)$ 在 $[0, 1]$ 存在, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 且 $f'(0) = f'(1) = 0$, 试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $|f''(\xi)| \geq 4$.

证明 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-1)^2, \xi_2 \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

分别将 $x = \frac{1}{2}$ 代入得:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{1}{8}f''(\xi'_1), \quad 0 < \xi'_1 < \frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \frac{1}{8}f''(\xi'_2), \quad \frac{1}{2} < \xi'_2 < 1.$$

两式相减得:

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)].$$

$$\text{所以 } 1 = |f(1) - f(0)| = \frac{1}{8} |f''(\xi_1) - f''(\xi_2)| \leq \frac{1}{8} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|]$$

记 $|f''(\xi)| = \max[|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|], 0 < \xi < 1,$

则 $1 \leq \frac{1}{8} \cdot 2 |f''(\xi)|$, 即 $|f''(\xi)| \geq 4, \xi \in (0, 1).$



练习题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \sin \frac{x}{\pi}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a 的值.

2. 讨论下列函数在指定点或区间的连续性:

(1) $f(x) = \begin{cases} (x+1) \cdot 2^{-(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x})}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处;

(2) 设 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x(1-x)^2$, 在 $x = 2$ 处;

(3) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$, 在 $(0, +\infty)$ 上.

3. 分析下列函数的间断点及其类型:

(1) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$; (2) $f(x) = [x] \sin \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = \frac{1}{1 - 8 \cdot 2^{\frac{1}{x-1}}}$.

4. 设 $f(x), g(x)$ 为连续函数 ($x \in [a, b]$), 证明函数 $h(x) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$ 和 $p(x) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x), g(x)\}$ 也都是连续函数.

5. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, $x_i \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{2}{n(n+1)} [f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n)]$.

6. 试证 $ax = \tan x (a > 1)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 求证存在 $\xi \in [0, \frac{n-1}{n}]$ 使 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$, 其中 n 为任意自然数.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3, \\ y = e^y \sin t + t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) 设 $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$;

(4) 设 $y = \sin^6 x + \cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$;

(5) 设 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$, 求 $y^{(n)}$.

(6) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = \tan(x+y)$ 所确定, 求 y'' .

(7) 设 $p(x) = \frac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$, 求 $p(1)$.

9. 已知直线 $y = x$ 与 $y = \log_a x$ 相切, 求 a 及切点.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中 g 在 $x = 0$ 可导. 问: $g(0), g'(0)$ 为多

少时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微?

11. 设方程 $x^2 - 27x + c = 0$, 就 c 的取值, 讨论方程实根的个数.

12. 证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$; (2) 当 $x > 0$ 时, $(1+x)^{1+\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{1}{x}}$.

13. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有二阶导数, 且 $f(a+1) = 0, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 求证 $(a, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 满足 $f''(\xi) = 0$.

14. 设 $f''(x)$ 连续, 且 $f''(x) > 0, f(0) = f'(0) = 0$. 试求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{u(x)} f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$, 其中

$u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

15. 设 $f_n(x) = C_1^n \cos x - C_2^n \cos^2 x + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x$, 求证:

(1) 对于任何自然数 n , 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中仅有一根;

(2) 设 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ 满足 $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

16. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 对任意 x , 都有 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)^2$, 试问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导?

17. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 对 $\forall x > 0$, 有 $f(x^2) = f(x)$, 且 $f(3) = 5$, 求 $f(x)$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 其中 $a > 0$, 且 $f(a) = 0$, 试证明: 在 (a, b) 内必有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$.

19. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 为 n 个不同的实数, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1, a_n]$ 上有 n 阶导数, 并满足 $f(a_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$, 证明对每个 $c \in [a_1, a_n]$, 都存在 $\exists \xi$ 使 $f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$.

20. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ 及 $\lambda \in [0, 1]$ 恒有:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

试证 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

21. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 证明:

(1) 对 $a < x < x_0 < y < b$, 存在 $\lambda (0 < \lambda < 1)$, 使 $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$;

(2) 对于 $0 < \lambda < 1$ 的 λ 有 $f[\lambda x + (1-\lambda)x] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

22. 设有一个球体, 其半径以 0.01 m/s 的速率增加, 求当其半径为 10 m 时, 体积及表面积的增加率各为多少?

23. 函数 $f(x)$ 在圆周上有定义并且连续, 证明必存在一条直径, 在其两个端点 a, b 上有 $f(a) = f(b)$.

24. 函数 $f(x) = 2^x - 1 - x^2$ 在实轴上有多少个零点?

25. 已知抛物线 $y^2 = 2mx$, 试从它的哪些与曲线的法线重合的所有弦中, 求一条长度最短的弦长.

26. 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (常数). 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

27. 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积 V 最小? 并求出该最小值.

28. 将一长为 a 的铁丝切成两段, 分别围成正方形和圆形. 问: 当两段铁丝各为多长时, 正方形面积与圆形面积之和最小? 并求最小面积.

第三讲 不定积分



知识要点

(一) 不定积分的概念和性质

1. 不定积分的概念: 若函数 $f(x)$ 为连续函数, 且 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数.

2. 不定积分的基本性质: 若函数 $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ 在区间 I 上的原函数都存在, 则它们的线性组合 $f = \sum_{i=1}^n k_i f_i$ 在区间 I 上也存在原函数, 且

$$\int f(x) dx = \int \sum_{i=1}^n k_i f_i dx = \sum_{i=1}^n k_i \int f_i dx;$$

其中 $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是不全为 0 的任意实数.

(二) 求不定积分的基本方法

1. 换元积分法: 设 $u = \varphi(x)$, 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\alpha \leq \varphi(x) \leq \beta$, $g(u)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有定义, 记 $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in [a, b]$,

(1) 若 g 在 $[\alpha, \beta]$ 上存在原函数 G , 则 f 在 $[a, b]$ 上也存在原函数 F , 且 $F(x) = G(\varphi(x)) + C$, 或

$$\int f(x) dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int g(u) du = G(\varphi(x)) + C.$$

(2) 若 $\varphi'(x) \neq 0, x \in [a, b]$, 则当 f 在 $[a, b]$ 上存在原函数 F 时, g 在 $[\alpha, \beta]$ 上也存在原函数 G , 且 $G(x) = F(\varphi^{-1}(u)) + C$, 或

$$\int g(u) du = \int g(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(u)) + C.$$

2. 分部积分法: 若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导, 且不定积分 $\int u'(x)v(x) dx$ 存在, 则 $\int u(x)v'(x) dx$ 也存在, 并且

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

(三) 几种典型的换元方法

以下式子中, $R(u, v)$ 表示 u, v 的有理函数, $a > 0$.

$$1. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \text{ 型, } a > 0, \text{ 令 } x = a \sin t, dx = a \cos t dt;$$

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \text{ 型, } a > 0, \text{ 令 } x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt;$$

$$3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \text{ 型, } a > 0, \text{ 令 } x = a \sec t, dx = a \sec t \tan t dt;$$

$$4. \int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}) dx \text{ 型, } a \neq 0, \text{ 令 } t = \sqrt[n]{ax+b}, x = \frac{t^m - b}{a},$$

$$dx = \frac{mn}{a} t^{nm-1} dt;$$

$$5. \int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \text{ 型, 令 } t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, x = \frac{dt^2 - b}{a - ct^2}, dx = \frac{a(ad - bc)t}{(a - ct^2)^2} dt,$$

其中设 $ad - bc \neq 0$;

$$6. \int R(\sin x, \cos x) dx \text{ 型, 令 } t = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

即万能代换, 一般非到不得已时不用.



例题分析

(一) 换元积分法

例 3.1 计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

解 作变量替换, 令 $x = \tan t, t = \arctan x, dx = \sec^2 t dt$, 则有

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{\tan t e^t}{\sec^3 t} \sec^2 t dt = \int e^t \sin t dt.$$

$$\text{又因为 } \int e^t \sin t dt = -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt = -e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \sin t dt,$$

$$\text{所以 } \int e^t \sin t dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C,$$

变量回代得

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

评注 对于被积函数中有 $1+x^2$ 和 $\arctan x$, 一般情况下, 令 $x = \tan t$ 换元能得到比较好的效果.

例 3.2 计算不定积分 $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$.

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 于是

$$\begin{aligned}\int \cos^2 \sqrt{x} dx &= 2 \int t \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int t d(\sin 2t) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t dt = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

例 3.3 计算不定积分 $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$.

解 设 $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = t$, 则 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2} dt$, 代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx = -4 \int \frac{t dt}{(t-1)(t+1)^3} \\ &= \int \left(-\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} \right) dt \\ &= \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C.\end{aligned}$$

评注 被积函数中出现根号, 如果没法用凑微分法凑成基本积分公式的形式, 那就需要用换元法尽量把根号去掉.

例 3.4 计算不定积分 $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

解 设 $t = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \left[\frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right] + C.\end{aligned}$$

评注 此题用一般的三角代换很难有好的效果, 在无计可施的情况下, 就用万能公式.

例 3.5 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}, a > 0$.

解 令 $x = a \sin t, \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, dx = a \cos t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{1}{\tan t + 1} dt \\ &= \int \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} (u = \tan t) = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1-u}{1+u^2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+u| + \frac{1}{2} \arctan u - \frac{1}{4} \ln(1+u^2) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sin t + \cos t| + \frac{1}{2} t + C \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |x + \sqrt{a^2 - x^2}| + \arcsin \frac{x}{a} \right] + C. \end{aligned}$$

评注 被积函数中出现 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 一般用 $x = a \sin t$ 代换.

(二) 分部积分法

例 3.6 计算不定积分 $\int e^x \sin x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int e^x \sin x dx &= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx, \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

例 3.7 计算不定积分 $\int x \ln(4 + x^4) dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \ln(4 + x^4) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(4 + x^4) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - 2 \int \frac{x^5}{4 + x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - 2 \int \left(x - \frac{4x}{4 + x^4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - x^2 + \arctan \left(\frac{x^2}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

例 3.8 推出下列积分的递推公式 (1) $I_n = \int \sin^n x dx$; (2) $K_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} (n > 2)$, 并计

$$\text{算 } I_6 = \int \sin^6 x dx; K_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} (n > 2).$$

$$\text{解 (1) } I_n = \int \sin^n x dx = - \int \sin^{n-1} x d(\cos x)$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} + (1-n) I_n,
\end{aligned}$$

于是
$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}.$$

又知 $I_0 = \int dx = x + C$, 即得

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int \sin^6 x dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4 = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} + \frac{5}{8} I_2 \\
&= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} - \frac{5 \cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16} x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad K_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right) \\
&= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2} = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} - \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.
\end{aligned}$$

又知 $K_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$, 即得

$$K_5 = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

(三) 一些特殊函数的积分法

例 3.9 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$, 右边通分后不难解得: $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C =$

$\frac{2}{3}$. 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} dx \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

评注 此积分看似简单, 但是其实并不简单, 必须把分式分解才行, 此时分解一般用

待定系数法求出系数.

例 3.10 计算不定积分 $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x + \varphi}{2} \right) \right| + C, \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

评注 对本题来说,可以用万能公式来求积分,本书所用的是一种更为简单的方法.

例 3.11 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} &= \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x + C. \end{aligned}$$

评注 本题求积分过程中需要用一般较难想到的技巧,否则较难求得积分值,主要是分母次数太高,又稍微有点复杂,需要在分子中凑两个都能和分母约分的表达式,使分母变得更加简单.

例 3.12 计算不定积分 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx &= \int \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx = \int \frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx \\ &= \int e^x d \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) + \int \tan \frac{x}{2} d(e^x) = e^x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

评注 对于被积函数中既有 e^x ,又有三角函数的,一般都会马上想到用分部积分,但是本题无法直接用分部积分,需要对三角分式进行变换,化成比较简单的形式再进行分部积分.

例 3.13 计算不定积分 $\int [x] |\sin \pi x| dx (x \geq 0)$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

解 设原函数为 $F(x)$, 分别求出在区间 $[0, 1), [1, 2), [2, 3), \dots, [[x], x)$ 上满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$ 的增量如下:

$$\text{在 } [0, 1) \text{ 上, } \int 0 \cdot \sin \pi x dx = C_1, F(1) - F(0) = 0;$$

$$\text{在 } [1, 2) \text{ 上, } -\int \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \cos \pi x + C_2, F(2) - F(1) = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{在 } [2, 3) \text{ 上, } 2 \int \sin \pi x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \pi x + C_3, F(3) - F(2) = \frac{2 \cdot 2}{\pi};$$

...

$$\text{在 } [[x], x) \text{ 上, } (-1)^{[x]} [x] \int \sin \pi x dx = (-1)^{[x]} \cdot [x] \left(-\frac{1}{\pi}\right) \cos \pi x + C_{[x]+1},$$

$$F(x) - F([x]) = \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x).$$

从而, 对于 $x \geq 0$, 得到

$$\begin{aligned} \int [x] |\sin \pi x| dx &= F(x) + C \\ &= (F(1) - F(0)) + (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \dots + (F(x) - F([x])) + C \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2 \cdot 2}{\pi} + \dots + \frac{2([x] - 1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{[x] \cdot ([x] - 1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} [x] (-1)^{[x]}}{\pi} - \frac{(-1)^{[x]} [x] \cos \pi x}{\pi} + C \\ &= \frac{[x]}{\pi} ([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x) + C. \end{aligned}$$

评注 本题在一般课本中很少见, 被积函数既要 x 求整, 又要对 $\sin \pi x$ 求绝对值. 首先从简单的入手考虑 $[x]$ 的取值, 以及 $\sin \pi x$ 的正负, 从中找出规律, 得到积分值.

例 3.14 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

解 由条件知 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)'$,

$$\begin{aligned} \int x^3 f'(x) dx &= \int x^3 df(x) = x^3 f(x) - 3 \int x^2 f(x) dx \\ &= x^3 \left(\frac{\sin x}{x}\right)' - 3 \int x^2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(x\cos x - \sin x) - 3 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\
&= x(x\cos x - \sin x) - 3x\sin x + 6 \int \sin x dx \\
&= x^2 \cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C.
\end{aligned}$$

评注 一般对于这类题目并不需要把 $f(x)$ 求出来, 一般情况下利用分部积分就行了.

例 3.15 证明 $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}}$

其中 A, B, C 为未定系数.

证明 $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, 式中 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} &= (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{dx}{\sin^n(x + \alpha)} = -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{d[\cot(x + \alpha)]}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} \\
&= -(a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{\cot(x + \alpha)}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{\cot(x + \alpha)\cos(x + \alpha)}{\sin^{n-1}(x + \alpha)} dx \\
&= \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1 - \sin^2(x + \alpha)}{\sin^n(x + \alpha)} dx.
\end{aligned}$$

设 $I_n = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n}$, 则由上式得

$$I_n = \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + (2-n)I_n + \frac{n-2}{a^2 + b^2} I_{n-2},$$

于是 $I_n = \frac{\frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)} \sin x - \frac{a}{(n-1)(a^2 + b^2)} \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)} I_{n-2},$

即 $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-2}},$

式中 $A = \frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)}, B = \frac{-a}{(n-1)(a^2 + b^2)}, C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)}.$

评注 此题要求学生递推和三角函数关系比较熟, 而且一般刚拿到此题不知道从何下手, A, B, C 是未定系数, 对学生来说也是一个难点. 本书所用解法主要是通过对等式左边化简后凑出一个递推公式, 再去凑成等式右边的形式.

例 3.16 求不定积分 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{(\tan^2 x + 2)^2} = \int \frac{\sec^2 x d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{\tan^2 x}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x) + \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{(\tan^2 x + 2) - 2}{(\tan^2 x + 2)^2} d(\tan x) + \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
 &= \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} - \int \frac{d(\tan x)}{(\tan^2 x + 2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C \\
 &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\tan x}{4(\tan^2 x + 2)} + C.
 \end{aligned}$$

评注 此题主要考查学生对三角函数变换公式掌握的熟练程度.

例 3.17 求不定积分 $\int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}$.

$$\text{解} \quad \int \frac{(x^2 - 1)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}} = \int \frac{\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx}{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{(x^2 + 1)^2}}} = \int \frac{\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1}\right)^2}}.$$

下面我们首先考虑积分 $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$, 设 $x = \tan t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \sec^2 t dt$,

代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{\tan^2 t - 1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int (\sin^2 t - \cos^2 t) dt - \int \cos 2t dt \\
 &= -\frac{1}{2} \sin 2t + C_1 = -\frac{x}{1 + x^2} + C_1.
 \end{aligned}$$

从而可得 $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} d\left(\frac{\sqrt{2}x}{1 + x^2}\right)$.

$$\text{于是} \quad \int \frac{\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{x^2 + 1}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}x}{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{1 + x^2}\right)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{1 + x^2}\right) + C.$$

评注 此题通过化简以后其实就是一个凑微分, 但是这个微分形式很难看出来, 所以需要对方函数 $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ 先进行积分, 求出它的原函数, 从而进行凑微分.

例 3.18 求不定积分 $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

解 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right),$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right),$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right] + \frac{1}{4\sqrt{3}} [\ln(x^2+x\sqrt{3}+1) \\ &\quad - \ln(x^2-x\sqrt{3}+1)] + C_1 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1} + C.\end{aligned}$$



练习

1. 求下列不定积分:

$$(1) \int \sin(\ln x) dx; \quad (2) \int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx; \quad (3) \int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx;$$

$$(4) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \quad (5) \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx; \quad (6) \int e^x \sin^2 x dx;$$

$$(7) \int e^{ax} \cos bx dx; \quad (8) \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} dx; \quad (9) \int \frac{x+5}{x^2-2x-1} dx;$$

$$\begin{aligned}
(10) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx; & \quad (11) \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}; & \quad (12) \int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx; \\
(13) \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx; & \quad (14) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx; & \quad (15) \int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx; \\
(16) \int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x}; & \quad (17) \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}; & \quad (18) \int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \arctan x dx; \\
(19) \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx; & \quad (20) \int \frac{\ln[(x+a)^{r+a}(x+b)^{r+b}]}{(x+a)(x+b)} dx.
\end{aligned}$$

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

3. 已知 $f(x) = f(x+4)$, $f(0) = 0$, 且在 $[-2, 2]$ 上有 $f'(x) = |x|$, 求 $f(9)$.

第四讲 定积分



知识要点

(一) 定积分概念及其性质

定积分的定义: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 则数

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (4.1)$$

(式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分.

极限(4.1)存在的充要条件是: 积分下和

$$\underline{S} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

及积分上和

$$\bar{S} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

当 $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时有共同的极限, 其中

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

(二) 定积分计算和证明

1. 牛顿-莱布尼兹公式: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义而且连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的几何意义表示由曲线 $y = f(x)$, x 轴以及垂直于 x 轴的两直线 $x = a$ 和 $x = b$ 四者所围成的代数面积.

2. 分部积分法: 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

3. 变量替换法: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续, 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 在闭区

间 $[\alpha, \beta]$ 内连续, 其中 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$; 复合函数 $f(\varphi(t))$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 内有定义并连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

4. 积分第一中值定理: 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

若特别地取 $g(x) \equiv 1$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

5. 积分第二中值定理: 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单调函数, $g(x)$ 为可积函数, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

6. 微积分学基本定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由变上限积分

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b],$$

定义的函数 Φ 在 $[a, b]$ 上可导, 而且 $\Phi'(x) = f(x)$.

(三) 广义积分

1. 函数的广义积分: 若函数 $f(x)$ 在每个有穷区间 $[a, b]$ 上依寻常的意义是可积分的, 则定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (4.2)$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a, b-\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) 内依寻常意义是可积的, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx. \quad (4.3)$$

若极限(4.2)或(4.3)存在, 则对应的广义积分称为收敛的, 否则称为发散的.

2. 柯西准则: 积分(4.2)收敛的充要条件是对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $b = b(\epsilon)$, 对于任意的 $b' > b, b'' > b$, 始终有下面不等式成立:

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

积分(4.3)收敛的充要条件是对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon)$, 对于任意的 $\delta' < \delta, \delta'' < \delta$, 始终有下面不等式成立:

$$\left| \int_{b-\delta'}^{b-\delta''} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

3. 广义积分收敛的判别法: 若 $|f(x)|$ 是广义可积的, 则函数 $f(x)$ 的对应的积分 (4.2) 或 (4.3) 称为绝对收敛的.

(1) 比较判别法 1: 设当 $x \geq a$ 时, $|f(x)| \leq F(x)$, 若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

(2) 比较判别法 2: 若 $f(x) > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) = O(f(x))$. 则积分 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

(3) 狄利克雷判别法: 若 $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调且当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ 收敛, 但一般情况下, 并不是绝对收敛.

(四) 定积分的应用

1. 面积的计算方法

(1) 直角坐标系中的面积: 由两条连续的曲线 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) 与 x 轴的两条垂线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的面积 S 等于

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

(2) 参数方程曲线所围成的面积: 若 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为一平滑曲线的参数方程, $x'(t) > 0$ (对于 $x'(t) < 0$ 的情形也可仿照讨论), 则由曲线及直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴围成的平面图形的面积 S 等于

$$S = \int_a^\beta |y(t)| x'(t) dt.$$

(3) 极坐标系中的面积: 由连续曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 所围成的面积 S 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

2. 弧长的计算方法

(1) 直角坐标系中的弧长: 平滑曲线 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) 上的一段弧长长度 s 等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

(2) 参数方程所表示曲线的弧长: 若 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为一平滑曲线的参数方程, 则在此区间上曲线的弧长 s 等于

$$s = \int_a^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

(3) 极坐标系中的弧长: 若 $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) 式中 $r(\varphi)$ 及其导数 $r'(\varphi)$ 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则曲线上对应弧长等于

$$s = \int_a^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

3. 体积的计算方法

(1) 已知横截面计算体积: 若物体体积 V 存在及 $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为 x 处的横截面积, 则

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

(2) 旋转体的体积: 面积 $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, 式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负连续函数, 绕 x 轴旋转所成环形的体积等于

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx.$$

4. 旋转曲面面积的计算方法

(1) 直角坐标系中的弧长: 平滑曲线 $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) 上的一段弧绕 x 轴旋转得到的面积等于

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

(2) 参数方程所表示曲线的弧长: 若 $x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为一平滑曲线的参数方程, 那么它绕 x 轴旋转所得曲面面积为

$$S = 2\pi \int_a^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$



例题分析

(一) 定积分的计算

例 4.1 求定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ 的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= \left(-x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \right) + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

例 4.2 求定积分 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 的值.

解 设 $\sqrt{x} = t$, 由 $x:0 \rightarrow 1$ 得 $t:0 \rightarrow 1$, 则

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 4.3 求定积分 $I_n = \int_0^1 x^n (\ln^n x) dx$ 的值.

解 由于 $I_n = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } I_n &= -\frac{n}{m+1} I_{n-1} = \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{m+1}\right) I_0 \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

评注 先求出递推公式, 再利用递推公式求出 I_n .

例 4.4 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$ 的值.

解 令 $f(x) = \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$, 对于任意的 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 得:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) &= \frac{1}{1 + (\tan(\pi/2 - x))^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{1 + \cot^{\sqrt{2}} x} + \frac{1}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} \\ &= \frac{\tan^{\sqrt{2}} x}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} + \frac{1}{1 + \tan^{\sqrt{2}} x} = 1, \end{aligned}$$

用变量替换不难得到: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$,

所以
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

评注 此题要直接求积分几乎不可能, 因此需要用到一些小的技巧. 根据经验不难知道 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$, 再验证 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x)$ 是一个常数 ($f(x)$ 见上文), 这样就可以得到积分值.

例 4.5 设常数 $0 < a < 1$, 求 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x}$.

解
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a \cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x},$$

对后者作积分变换 $x = \pi - t$, 得 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 + a \cos x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d(-t)}{1 - a \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a \cos t}.$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1-a\cos x} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^2-a^2} \quad (\tan x = t) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{1-a^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.
 \end{aligned}$$

评注 此题要直接求积分几乎也是不可能的,因此把积分区间分成两部分,然后对其中一部分进行变换,使得两部分在相同区间上积分,然后再把它们合并.

例 4.6 求定积分 $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$.

解 设 $u = \frac{\sin nx}{\sin x}$, 利用公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 得

$$u = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$$

当 $n = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}
 u &= (e^{ikx} + e^{-ikx})(e^{i(k-1)x} + e^{i(k-3)x} + \cdots + e^{-i(k-3)x} + e^{-i(k-1)x}) \\
 &= e^{(2k-1)ix} + e^{(2k-3)ix} + \cdots + e^{ix} + e^{-ix} + \cdots + e^{-(2k-1)ix} \\
 &= 2[\cos(2k-1)x + \cos(2k-3)x + \cdots + \cos x].
 \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi} u du = 2 \left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \frac{\sin(2k-3)x}{2k-3} + \cdots + \sin x \right] \Big|_0^{\pi} = 0.$$

当 $n = 2k+1$ 时, 同上得

$$u = 2[\cos 2kx + \cos 2(k-1)x + \cdots + \cos 2x] + 1,$$

于是

$$\int_0^{\pi} u du = \pi.$$

最后得到

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数;} \\ \pi, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

例 4.7 求 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, 其中 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 中使被积函数有意义的一切值所成之集合.

解 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx \\
 &= \frac{8}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

(二) 有关定积分的证明

例 4.8 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$, $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$, 试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

证明 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq \pi$), 则有 $F(0) = F(\pi) = 0$, 又因为

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x dF(x) \\
 &= F(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} F(x) \sin x dx.
 \end{aligned}$$

所以存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $F(\xi) \sin \xi = 0$, 若不然, 则在 $(0, \pi)$ 内 $F(x) \sin x$ 恒正或者恒负, 均与 $\int_0^{\pi} F(x) \sin x dx = 0$ 矛盾. 且当 $\xi \in (0, \pi)$ 时, $\sin \xi \neq 0$, 故 $F(\xi) = 0$.

由上述证明, 得 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$ ($0 < \xi < \pi$).

对 $F(x)$ 在区间 $[0, \xi], [\xi, \pi]$ 上分别用罗尔定理, 知至少存在 $\xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 即 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

评注 本题主要利用定积分的性质以及罗尔定理.

例 4.9 设 $f(x)$ 是一个连续函数, 证明: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $\int_0^1 f(x) x^2 dx = \frac{1}{3} f(\xi)$ 成立.

证明 由于 f 是连续的, 它在 $[0, 1]$ 中的 x_1 和 x_2 处分别达到最大值和最小值, 所以

$$f(x_2) \int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 f(x) x^2 dx \leq f(x_1) \int_0^1 x^2 dx,$$

$$f(x_2) \leq 3 \int_0^1 f(x) x^2 dx \leq f(x_1).$$

由介值定理, 必存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f(\xi) = 3 \int_0^1 f(x) x^2 dx$.

评注 本题主要考察连续函数的介值定理.

例 4.10 令 f 为连续函数, 对所有 x 满足 $f(x) \geq 0$, 且有 $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$.

证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \int_0^n xf(x) dx \rightarrow 0$.

证明 由于 $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有

$\int_n^{\infty} f(x) dx < \varepsilon$, 因此, 对充分大的 n , 使 $n\varepsilon > N$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(\frac{x}{n}\right) f(x) dx &= \int_0^{n\varepsilon} \left(\frac{x}{n}\right) f(x) dx + \int_{n\varepsilon}^n \left(\frac{x}{n}\right) f(x) dx < \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x) dx + \int_{n\varepsilon}^n f(x) dx \\ &< \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x) dx + \varepsilon < \varepsilon \left(\int_0^{n\varepsilon} f(x) dx + 1 \right). \end{aligned}$$

由 ε 的任意性以及 $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$ 都成立, 由此得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n xf(x) dx \rightarrow 0$.

评注 本题主要考察极限的定义和对 $\varepsilon - N$ 语言的掌握程度.

例 4.11 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续, 且当 $x \geq 10^{10}$ 时 $f(x) = 0$, 试证:

$$\int_0^{\infty} f^2(x) dx \leq 2 \sqrt{\int_0^{\infty} x^2 f^2(x) dx} \sqrt{\int_0^{\infty} f'^2(x) dx}.$$

证明 由分部积分可得:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^2(x) dx &= xf^2(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x \cdot 2f(x)f'(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} x \cdot 2f(x)f'(x) dx. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式 $\left| \int_0^{\infty} xf(x)f'(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^{\infty} x^2 f^2(x) dx} \sqrt{\int_0^{\infty} f'^2(x) dx}$ 即得结论.

评注 本题主要考察 Cauchy-Schwarz 不等式.

例 4.12 f 是从 $[0, \infty)$ 到 $[0, \infty)$ 上的严格递增的连续函数, 且 $g = f^{-1}$, 试证:

$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx \geq ab$ 对所有正数 a 和 b 成立, 并确定等式成立的条件.

证明 不失一般性, 假设 $f(a) \leq b$, 有 $ab = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a (b - f(x)) dx$,

$$\int_0^a (b - f(x)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(b - f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) \right).$$

$$\text{当 } 0 \leq k \leq n-1 \text{ 时, } \frac{a}{n} = \frac{(k+1)a}{n} - \frac{ka}{n} = g \cdot f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) - g \cdot f\left(\frac{ka}{n}\right).$$

代入上面极限得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(b - f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) \right) \left(g \cdot f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) - g \cdot f\left(\frac{ka}{n}\right) \right)$.

整理上式, 又 $f(0) = g(0) = 0$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} g \cdot f\left(\frac{ka}{n}\right) \left(\left(f\left(\frac{(k+1)a}{n}\right) - f\left(\frac{ka}{n}\right) \right) \right) + ab - af(a)$.

由于 g 是连续函数, 因此上式等于 $\int_0^{f(a)} g(y) dy + a(b - f(a))$,

由于对 $y \in (f(a), b)$ 有 $g(y) \geq a$, 使得 $a(b - f(a)) \leq \int_{f(a)}^b g(y) dy$.

所以 $ab = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a (b - f(x)) dx$.

同时, 不难看到等式成立的充要条件是 $f(a) = b$.

(三) 广义积分

例 4.13 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx, a \geq 0$.

上式两边对 a 求导得 $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin ax \cos ax \cdot x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx$,

令 $y = 2ax$, 则 $dy = 2a dx$, 所以 $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$,

将上式积分可得 $I(a) = \frac{\pi}{2} a + C$.

由于 $I(0) = 0$, 所以 $C = 0$, 令 $a = 1$ 得到 $I(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

评注 本题无法直接求得积分值, 解决方法就是先构造一个函数, 而所求积分是此函数的一种特殊情况, 那么只要求出这个函数的一般表达式就可以求得积分.

例 4.14 计算 $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx$, 其中 $a > 0$ 是一常数. ($\log x$ 表示底数可以是任意不为 1 的正数.)

解 令 $x = a^2/y$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx &= \int_0^a \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_a^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \\ &= \int_0^a \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_a^0 \frac{\log(a^2/y)}{a^2 + (a^2/y)^2} \left(-\frac{a^2}{y^2}\right) dy \\ &= \int_0^a \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx + \int_0^a \frac{2 \log a - \log y}{a^2 + y^2} dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^a \frac{2 \log a}{a^2 + y^2} dy = 2 \frac{\log a}{a} \arctan \frac{y}{a} \Big|_0^a = \frac{\pi \log a}{2a}.$$

例 4.15 计算 $I = \int_0^\pi \log(\sin x) dx$.

解 令 $x = 2u$, 得

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2u) du = 2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u) du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos u) du \right) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \log 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log(\sin u) du \right) \\ &= \pi \log 2 + 2 \int_0^\pi \log(\sin u) du = \pi \log 2 + 2I, \end{aligned}$$

所以 $I = -\pi \log 2$.

例 4.16 设 a, b 均为常数, $a > -2, a \neq 0$, 求 a, b 为何值时, 使

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx = \int_0^1 \ln(1-x^2) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^1 \ln(1-x^2) dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \ln(1-x^2) dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left((x \ln(1-x^2)) \Big|_0^t + \int_0^t \frac{2x^2}{1-x^2} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(t \ln(1-t^2) - 2t + \ln \frac{1+t}{1-t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (t \ln(1+t) + t \ln(1-t) - 2t + \ln(1+t) - \ln(1-t)) \\ &= \ln 2 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2-b+a}{2x+a} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{(2x+a)^{1-\frac{1}{2}(b-a)}} \right) \Big|_1^t, \end{aligned}$$

若 $b-a \neq 0$, 上述极限不存在, 所以要使原等式成立, 必须 $a=b$, 那么

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x}{(2x+a)} \right) \Big|_1^t = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{a+2}.$$

所以

$$\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{a+2} = \ln 2 - 2,$$

解得 $a = b = 4e^{-2} - 2$.

评注 本题需要先求出右边的积分值, 这个难度并不大. 然后再求左边的积分值, 使得左右相等就可以求出 a, b 的值了.

例 4.17 对 $x > 0$ 令 $f(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$, 试证: $0 < f(x) < \frac{1}{x}$.

证明 令 $t = x + s$, 得 $f(x) = e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-(x+s)^2/2} ds = \int_0^\infty e^{(-x-s)^2/2} ds$.

因为 $s > 0, e^{-s^2/2} < 1$, 所以对所有的 $x > 0$ 有 $e^{(-x-s)^2/2} < e^{-x^2}$; 所以 $0 < f(x) < \int_0^\infty e^{-x^2/2} ds = \frac{1}{x}$.

例 4.18 证明积分 $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ 收敛.

证明 当 $n \geq 0$ 时, 令 $S_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx$. 显然如果级数 $\sum_{n=0}^\infty S_n$ 收敛, 则原积分收敛.

不难知道 S_n 的符号是交错的, 令 $u = x^2$, 得

$$\begin{aligned} 2|S_n| &= \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \right| > \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u+\pi}} du \right| \\ &= \left| \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \right| = 2|S_{n+1}|, \end{aligned}$$

又
$$2|S_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du \right| < \frac{1}{\sqrt{n\pi}},$$

所以 $|S_n|$ 单调递减且趋向 0, 由 Leibniz 准则知 $\sum_{n=0}^\infty S_n$ 收敛, 所以

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^\infty S_n < \infty.$$

评注 本题主要把这个无限区间上的积分分成无穷段, 构成一个级数求和的形式, 然后通过对这个级数的分析, 利用 Leibniz 准则知级数收敛, 从而积分收敛. 这也是证明广义积分收敛的一种方法.

(四) 定积分的应用

例 4.19 求由参数方程 $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$ 所表示曲线围成的图形面积.

解 当 $t = 0$ 或 $t = 2$ 时, $x = 0, y = 0$;

当 $0 < t < 2$ 时, $x > 0, y > 0$;

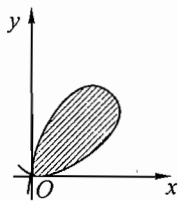
当 $t < 0$ 时, $x < 0, y > 0$;

当 $t > 2$ 时, $x < 0, y < 0$;

如图所示, 所求面积为

$$S = - \int_0^2 (2t^2 - t^3) \cdot 2(1-t) dt = -2 \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2) dt = \frac{8}{15}.$$

评注 参数方程求曲线所围图形面积, 可以利用公式.



例 4.20 求由曲线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 围成图形的面积.

解 所求面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

评注 极坐标方程求曲线所围图形面积, 可以利用公式.

例 4.21 求曲线 $y = e^x (0 \leq x \leq x_0)$ 的弧长.

解 所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left[\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right] \Big|_0^{x_0} \\ &= \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \\ &= x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

例 4.22 求 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0$: (1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y = 2a$ 的体积.

解 所求体积为 (1) $V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$;

$$(2) V_y = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = 6\pi^3 a^3;$$

(3) 作平移: $y = \bar{y} + 2a, x = \bar{x}$, 则曲线方程为 $\bar{x} = a(t - \sin t), \bar{y} = -a(1 + \cos t)$, 及 $\bar{y} = -2a$.

$$\text{于是, 所求体积为 } V_{\bar{x}} = \pi \int_0^{2\pi} [4a^2 - a^2(1 + \cos t)^2] a(1 - \cos t) dt = 7\pi^2 a^3.$$

评注 主要是(3)有点麻烦, 需要先进行平移求出平移后的曲线方程, 再来求体积.

例 4.23 求 $r = a(1 + \cos\varphi) (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$: (1) 绕极轴; (2) 绕直线 $r \cos\varphi = -\frac{a}{4}$ 的体积.

$$\text{解 (1) } V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{8\pi a^3}{3}.$$

(2) 所求的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\pi r^2 \left(\frac{2}{3} r \cos\varphi + \frac{a}{4} \right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi + \frac{\pi a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2}\right) \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\
 &= \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2}\right) \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi + \frac{\pi^2 a^3}{2} = \frac{13}{4} \pi^2 a^3.
 \end{aligned}$$

例 4.24 求 $y = \tan x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 绕 Ox 轴所得图形的侧面积.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sec^4 x} = \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x}.$

所求表面积为

$$\begin{aligned}
 P_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\
 &= \pi \left[\frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} - \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)\sqrt{5} - 1}{2} \right].
 \end{aligned}$$

例 4.25 某闸门的形状大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$, 闸门矩形部分的高 h 为多少米?

解 建立坐标系如图, 则抛物线方程为 $y = x^2$. 矩形部分受的水压力为

$$F_1 = 2 \int_1^{h+1} \rho g (h+1-y) dy = 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{1}{2}y^2 \right] \Big|_1^{h+1} = \rho g h^2,$$

其中, ρ 为水的密度, g 为重力加速度.

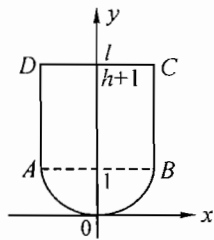
$$\text{闸门下部承受的水压力为 } F_2 = 2 \int_0^1 \rho g (h+1-y) \sqrt{y} dy = 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right).$$

由题意 $\frac{F_1}{F_2} = \frac{5}{4}$, 不难得到 $h = 2$.

评注 求液体静压力, 难点在于用微元法写出压力的定积分表达式.

例 4.26 为清除井底淤泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口. 已知井深 30m, 抓斗自重 400N, 缆绳每米重 50N, 抓斗抓起的污泥重 2000N, 提升速度为 3m/s, 在提升过程中, 污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏出. 现在将抓起污泥的抓斗提升到井口, 问重力需做多少焦耳的功?

解 以竖直方向为 x 轴, 井底为原点建立坐标轴, 将抓起污泥的抓斗提升至井口需



做功为

$$W = W_1 + W_2 + W_3.$$

其中, W_1 是克服抓斗自重所做的功; W_2 是克服缆绳重力所做的功; W_3 为提出污泥所做的功, 由题意知 $W_1 = 400 \times 30 = 12000 (\text{N} \cdot \text{m})$.

将抓斗从 x 处提升到 $x + dx$ 处, 克服缆绳重力所做的功为 $dW_2 = 50(30 - x)dx$,

$$\text{从而 } W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500 (\text{N} \cdot \text{m}).$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥需做功为 $dW_3 = 3(2000 - 20t)dt$,

$$\text{将污泥从井底提升至井口共需时间 } 10\text{s}, \text{ 所以 } W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000 (\text{N} \cdot \text{m}).$$

所以, 总共需做功 $W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500 (\text{N} \cdot \text{m})$.

评注 定积分应用, 要求能将实际中功的计算转化为定积分的问题, 难点在于缆绳自身重量在变化, 抓斗中的污泥重量也在变化.

例 4.27 设有半径为 R 的球体, P_0 是此球表面上定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比, 比例常数为 $k > 0$, 求球体的重心位置.

解 记所考虑的球体为 Ω , 以 Ω 的球心为原点 O , 射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系, 则点 P_0 的坐标为 $(R, 0, 0)$, 球面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

$$\text{设 } \Omega \text{ 的重心位置为 } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \text{ 由对称性得 } \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} xk((x-R)^2 + y^2 + z^2)dV}{\iiint_{\Omega} k((x-R)^2 + y^2 + z^2)dV},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \iiint_{\Omega} ((x-R)^2 + y^2 + z^2)dV &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dV + \iiint_{\Omega} R^2 dV \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr + \frac{4}{3} \pi R^2 = \frac{32}{15} \pi R^2. \end{aligned}$$

评注 利用三重积分求物体重心的技能, 进行三重积分在球面积分中的计算.

(五) 杂例

例 4.28 令 $0 \leq \alpha \leq 1$ 给定, 试确定 $[0, 1]$ 上所有满足下面三个条件的非负连续函数

$$f: \int_0^1 f(x)dx = 1, \int_0^1 xf(x)dx = \alpha, \int_0^1 x^2 f(x)dx = \alpha^2.$$

解 由 Cauchy-Schwarz 不等式得:

$$a = \int_0^1 xf(x)dx \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx \int_0^1 f(x)dx \right)^{1/2} \leq \alpha.$$

因此上面的不等式中等号必然成立. 为了使 Cauchy-Schwarz 不等式中等号成立, 必

须有 $x\sqrt{f(x)} = k\sqrt{f(x)}$ 对某个 k 成立, 所以 $\sqrt{f(x)} \equiv 0$, 这显然与 $\int_0^1 f(x)dx = 1$ 矛盾.

所以, 这样的函数不存在.

例 4.29 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) + g(x) \neq 0$, 且 $f(x) = g(a+b-x)$,

求 $I = \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} dx$.

解 令 $x = a + b - t$, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} dx \\ &= \int_a^b \frac{f(a+b-t)}{f(a+b-t) + g(a+b-t)} d(-t) \\ &= \int_a^b \frac{g(t)}{g(t) + f(t)} dt, \end{aligned}$$

所以 $2I = \int_a^b \frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)} dx = b - a, I = \frac{1}{2}(b - a)$.

例 4.30 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明柯西—许瓦兹不等式成立:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx.$$

证明 对于任何实数 u , 都有 $[uf(x) - g(x)]^2 \geq 0$, 从而

$$u^2 \int_a^b f^2(x)dx - 2u \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0.$$

对任何实数 u , 上面不等式总成立, 所以其判别式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 - \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leq 0.$$

即为所证.



练习题

1. 定积分的计算:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin x} dx;$

(2) $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx;$

(3) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx;$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx;$

(5) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$

(6) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx;$

(8) $\int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{|x^2 - q|}}.$

2. 令 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为一个定义在实数上的单调减函数, 且有 $\int_0^{\infty} f(x) dx < +\infty$. 证明:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$.

3. 是否存在满足下列条件的函数 $f(x)$, 若存在请找出来, 若不存在, 请给出理由.

$$\int_0^1 f(x) dx = 1;$$

$$\int_0^1 xf(x) dx = a;$$

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = a^2;$$

其中, $0 \leq a \leq 1$ 给定.

4. 证明积分 $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$ 和 $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ 收敛.

5. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$, $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x) dx$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\varphi(x) = f(x) \int_0^x f(t) dt$ 单调减少, 证明在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 求证: $\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 0$. 试证明至少存在两个不同的点 $\xi_1 \in (0, 1)$, $\xi_2 \in (0, 1)$, 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

9. 过点 $p(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成的平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

10. 两个相同直径的圆柱体, 其中心线垂直并相交. 求圆柱公共部分的体积.

11. 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} a > 0$. 求: ① 它所围成的图形的面积; ② 它的全长; ③ 绕 x 轴旋转而形成的旋转体的全面积; ④ 绕 x 轴旋转而形成的旋转体的体积.

12. 求曲线 $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$ 所围图形的面积.

13. 求曲线 $y^2 = \frac{x^2}{2a-x} \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a \right)$ 的弧长.

14. 求下列曲面所围成图形的体积: $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

15. 一半径为 R 比重正好与水的比重一样的球沉入水中, 现将其取出正好完全脱离

水面,问做功多少?

16. 设有一半半径为 R 的球沉入密度为 R 的液体中,球心距液面为 $H(H \geq R)$,求球面所受总的静压力.

17. 用铁锤将铁钉打入木板,设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板深度成正比,在铁锤击第一次时能将铁钉击入木板内 1cm,如果铁锤每次打击所做的功相等,问铁锤击第二次时能将铁钉又击入多深?

18. 证明: $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \leq \frac{\pi}{6}$.

19. 设 $x > 0$. 证明 $\int_0^x t(1-t)\sin^{2n}t dt < \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

20. 设 $\{f_n\}$ 为一个 $[0,1] \rightarrow R$ 的连续映射序列,满足 $\int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \rightarrow 0$, 当 $n, m \rightarrow +\infty$, 令 $K: [0,1] \times [0,1] \rightarrow R$ 是连续的, 令 $g_n(x) = \int_0^1 K(x,y)f_n(y)dy$. 定义 $g_n: [0,1] \rightarrow R$, 证明序列 $\{g_n\}$ 一致收敛.

第五讲 无穷级数



知识要点

(一) 正项级数收敛性的判别法

1. 柯西准则: 数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (5.1)$$

收敛的充要条件是对于任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的 $p > 0$, 都有不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立.

2. 比较判别法 I: 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 均为正项级数, 且存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 都有 $a_n \leq b_n$ 成立, 则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散.

3. 比较判别法 II: 设

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

则 (a) 当 $p > 1$ 时级数 (5.1) 收敛, (b) 当 $p \leq 1$ 时级数 (5.1) 发散.

4. 达朗贝尔判别法: 若 $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 (5.1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数 (5.1) 发散.

5. 柯西判别法: 若 $a_n \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(a) 当 $q < 1$ 时级数(5.1) 收敛, (b) 当 $q > 1$ 时级数(5.1) 发散.

6. 拉阿伯判别法: 若 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则(a) 当 $p > 1$ 时级数(5.1) 收敛, (b) 当 $p < 1$ 时级数(5.1) 发散.

7. 柯西积分判别法: 若 $f(x) (x > 0)$ 是非负的不增函数, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 与积分

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

(二) 变号级数收敛性的判别法

1. 莱布尼兹判别法: 交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n-1} b_n + \dots$$

($b_n \geq 0$) 收敛, 若(a) $b_n \geq b_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 和(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

2. 阿贝尔判别法: 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \quad (5.2)$$

收敛, 若(a) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, (b) $b_n (n = 1, 2, \dots)$ 形成一单调并有界的序列.

3. 狄里克利判别法: 级数(5.2) 收敛, 若(a) 部分和序列 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的, (b) 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, b_n 单调趋向于零.

(三) 幂级数

1. 幂级数的收敛区间: 对于幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (5.3)$$

的收敛区间为 $|x-a| \leq R$, 其中

$$R = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1},$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 存在, 收敛半径 R 也为

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

2. 和函数: 设幂级数(5.3) 在收敛区间 $(a-R, a+R)$ 上的和函数为 $f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

若 x 为收敛区间内的任意一点, 则

(a) f 在 x 点可导, 且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1};$$

(b) f 在区间 $[0, x]$ 上可积, 且

$$\int_0^x f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

3. 泰勒级数: 解析函数在 a 点可展开为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

当 $a = 0$ 时, 称为马克劳林展开, 即

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

4. 幂级数的运算法则: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b , 则

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n x^n, \quad |x| < R_a;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < R;$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R;$$

其中 λ 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}$, $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}$.

(四) 傅立叶级数

1. 傅立叶展开定理: 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$, 并且一切不连续点 ξ 是正则的, 即 $f(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi-0) + f(\xi+0))$, 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用傅立叶级数表出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots).$$

特别是:(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数,则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{式中 } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots);$$

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数,则:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{式中 } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \dots).$$

2. 帕塞瓦尔(Parseval)等式:设 $f(x)$ 可积且平方可积,则 $f(x)$ 的傅立叶系数 a_n 和 b_n 的平方构成的级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

是收敛的,且成立等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

上式称为帕塞瓦尔(Parseval)等式.

(五) 有关级数的其他知识

1. 级数直接求和法:若

$$u_n = v_{n+1} - v_n (n = 1, 2, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_{\infty}.$$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_{\infty} - v_1.$$

若 $u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}}$, 其中 a_i 形成以 d 为公差的等差级数,则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表示为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2. 阿贝尔方法: 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

然后借助对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的逐项微分法或积分法来求和.

3. 三角级数求和法: 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和, 常把它们视为复数域内幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ 的实部和虚部的系数.

4. 斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

利用上述公式可以近似求当 n 充分大时的 $n!$.



例题分析

(一) 级数收敛性的判别

例 5.1 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

解 由于正项级数 $\{a_n\}$ 单调减少有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记这个极限为 a , 则 $a \geq 0$, 若 $a = 0$, 则由莱布尼兹定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 故 $a > 0$, 于是

$$\frac{1}{a_n + 1} < \frac{1}{a + 1} < 1,$$

从而

$$\left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n < \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n < 1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n$ 是公比为 $\frac{1}{a + 1} < 1$ 的几何级数, 故收敛. 因此, 由比较判别法知原级数收敛.

评注 利用莱布尼兹定理知 $\{a_n\}$ 并不趋向于 0, 从而根据几何级数收敛得出结论.

例 5.2 判断下列级数的收敛性:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}.$$

解 (a) 使用比值判别法有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{(2n+2)!(3n+3)!}{(n+1)!(4n+4)!} \bigg/ \frac{(2n)!(3n)!}{n!(4n)!}, \\ &= \frac{n!(4n)!(2n+2)(2n+1)(2n)!(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(2n)!(3n)!(n+1)n!(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!}, \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} \rightarrow \frac{27}{64} < 1, \end{aligned}$$

因而级数收敛.

(b) 与级数 $\sum 1/(n \ln n)$ 相比较, 使用积分判别法可以看到它是发散的, 而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n^{1+1/n}}{1/(n \ln n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{1/n}} = \infty,$$

因此级数是发散的.

例 5.3 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 为正数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 反之则不成立.

解 由于 $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})^2 = a_{n+1} + a_n - 2\sqrt{a_n a_{n+1}}$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛.

取

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k+1; \\ \frac{1}{n^2}, & n = 2k. \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

评注 根据算术平均大于几何平均就可以得到结论.

例 5.4 求实数 x , 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^x}$ 收敛.

解 注意到 $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^x} \sim \frac{1}{x^{x+1/2}} (n \rightarrow \infty),$

所以给定级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1/2}}$ 同时收敛同时发散. 当 $x > 1/2$ 时它们收敛.

评注 主要是把级数一般项分子有理化,从而找出它的等价形式.

例 5.5 令 A 为整数的一个集合,这些数在它们的十进制表示中不包含数字 9,

证明: $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} < \infty$, 即 A 定义一个调和级数的收敛子列.

解 对于 $n = 1, 2, \dots$, A 中数小于 10^n 的项数是 $9^n - 1$, 所以我们有

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \sum_{n \geq 1} \sum_{10^{n-1} \leq a < 10^n} \frac{1}{a} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{9^n}{10^{n-1}} = 10 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{9}{10}\right)^n < \infty.$$

评注 主要是确定在 10^{n-1} 到 10^n 之间不包含数字 9 的数的个数.

例 5.6 已知 $a_1, a_2, \dots$ 为正数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明存在正数 $c_1, c_2, \dots$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n < \infty.$$

解 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在一个正整数递增数列 $\{N_k\}$, 对每个 k 满足 $\sum_{n=N_k}^{\infty} a_n < \frac{1}{k^3}$,

令

$$c_n = \begin{cases} 1, & n < N_1; \\ k, & N_k \leq n < N_{k+1}. \end{cases}$$

于是 $c_n \rightarrow \infty$, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \leq \sum_{n=1}^{N_1-1} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=N_k}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

(二) 幂级数

例 5.7 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

解 记 $a_n = \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$ 知, 收敛半径为 3, 收敛区间为 $(-3, 3)$. 在 $x = 3$ 处, 级数通项为

$$\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 所以原级数在 $x = 3$ 处发散, 在 $x = -3$ 处, 将通项拆成

$$\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \frac{1}{n}$ 都收敛, 从而在 $x = -3$ 处收敛.

评注 利用达朗贝尔判别法很容易得到结果.

例 5.8 设 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{b_n}$ 的收敛半径、收敛区间和收敛域.

解 不难得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_{n+1}} / \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1,$$

所以收敛半径为 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

在 $x = -1$ 处, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b_n}$ 为交错级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$, $\frac{1}{b_n} > \frac{1}{b_{n+1}}$, 由莱布尼兹定理, 该级数收敛.

在 $x = 1$ 处, 由于 $b_n < 2n$, 即有 $\frac{1}{b_n} > \frac{1}{2n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散.

所以, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{b_n}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$.

评注 利用达朗贝尔判别法很容易得到结果.

例 5.9 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n$ 的收敛域及和函数.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{2^{n+1} (n+1)!} / \frac{n^2 + 1}{2^n n!} = 0$, 所以收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$,

令 $u = \frac{x}{2}$, 则

$$\begin{aligned} S(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} u^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} u^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nu^n}{(n-1)!} = u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nu^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= u \left(\int_0^u \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nu^{n-1}}{(n-1)!} \right) du \right)' = u \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^u \frac{nu^{n-1}}{(n-1)!} du \right)' \\ &= u \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{(n-1)!} \right)' = u \left(u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \right)' = u \left(u \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \right)' \\ &= u(ue^u)' = u^2 e^u + ue^u. \end{aligned}$$

又 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} = e^u$,

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right), -\infty < x < +\infty$.

例 5.10 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^n$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的收敛性.

解 记 $a_n = \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^n$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, 故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$, 收敛区间为 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 对于 $n = 8k$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}.$$

及

$$\frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明, 当 $n = 8k+1, 8k+2, \dots, 8k+7 (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n \text{ 收敛.}$$

事实上, $\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零, 且

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m \left| (1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n \right| \cdot \frac{1}{3^n} &\leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n < \sum_{n=1}^m \left(\frac{1+\sqrt{2}}{3} \right)^n \\ &< \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{2}}{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} < 5. \end{aligned} \quad (5.4)$$

由狄里克利判别法知, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2\cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n$ 收敛.

于是, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数与几个收敛级数依次相加而成, 因此, 它是发散的.

评注 利用柯西判别法就可以得到收敛半径, 判断端点是否收敛需要把级数分成几个子列来考虑, 发现其中存在子列发散, 所以端点发散.

(三) 傅立叶级数

例 5.11 令 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是周期为 2π 的函数, 当 $-\pi \leq x < \pi$ 时满足 $f(x) = x^3$.

(a) 证明 f 的傅立叶级数具有形式 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 并写出一个关于 b_n 的积分公式.

(b) 证明该傅立叶级数对所有 x 收敛.

证明 (a) 由于 $f(x)$ 是一个奇函数, 对于 $n \in \mathbf{R}$ 积分

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

为零, 傅立叶级数只含有 $\sin nx$ 的项, 系数由

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx \, dx$$

给出.

(b) 由于 f 及 f' 是分段连续, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \begin{cases} f(x), & x \neq (2n+1)\pi; \\ 0, & x = (2n+1)\pi. \end{cases}$$

例 5.12 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的连续实值函数, 对所有 x 满足 $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$, 证明 f 是一个常数.

证明 由于 f 是 $\sqrt{2}$ 周期的, 我们有

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2n\pi i x} \, dx = \int_0^1 f(x+\sqrt{2}) e^{-2n\pi i x} \, dx.$$

令 $y = x + \sqrt{2}$, 我们看到

$$\hat{f}(n) = e^{2n\pi i \sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(y) e^{-2n\pi i y} \, dy.$$

由于 f 同时也是 1 周期的, 我们有

$$\hat{f}(n) = e^{2n\pi i \sqrt{2}} \int_0^1 f(y) e^{-2n\pi i y} \, dy = e^{2n\pi i \sqrt{2}} \hat{f}(n).$$

当 $n \neq 0$ 时, $e^{2n\pi i \sqrt{2}} \neq 1$, 所以当 $n \neq 0$ 时, $\hat{f}(n) = 0$, 且 f 为常数.

评注 由于 $f(x)$ 既以 1 为周期, 又以 $\sqrt{2}$ 为周期, 从而可以推出结论.

例 5.13 是否存在一个连续的实值函数 $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, 使 $\int_0^1 x f(x) \, dx = 1$,

$\int_0^1 x^n f(x) \, dx = 0$ 对 $n = 1, 2, \dots$ 成立? 给出一个例子或证明 f 不存在.

解 假设存在着一个 f , 由于 e^x 的幂级数一致收敛, 当 $n > 0$ 时我们有

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i n x)^k}{k!} \int_0^1 f(x) x^k dx = -2\pi i n.$$

这一等式与 Riemann-Lebesgue 引理相矛盾, 该引理表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$, 所以这样的函数不存在.

例 5.14 令 f 是 $[0, 2\pi]$ 上的二次可微实值函数, 具有 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 = f(2\pi) - f(0)$, 证明 $\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$.

证明 考虑 f 的傅立叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

我们有 $a_0 = 0$, 并由 Parseval 恒等式可得

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2) = \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx.$$

(四) 其他例题

例 5.15 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(a) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的值;

(b) 试证: 对任意的常数 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

解 (a) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt \quad (\tan x = t) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

(b) 因为对于一切 $n, a_n > 0$, 所以

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

例 5.16 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解
$$f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

因为当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 上述级数 $\frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 所以该级数所表示的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续, 而 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处也连续, 从而有

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \arctan \frac{1-2x}{1+2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \end{aligned}$$

一方面说明 $f(x)$ 的展开式成立的区间可以扩大到 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 即

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1},$$

另一方面求得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

例 5.17 求 $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k}$ 的和.

解 我们先求 $S(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^k$, 然后求 $S\left(\frac{1}{2}\right)$, 众所周知

$$\sum_{k=1}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, x \neq 1.$$

对上式两边求导得到

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

两边乘 x 后再次对两边求导, 然后再对求导的结果两边乘 x , 得到

$$S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{x^k} = \frac{x(1+x) - x^{n+1}(nx - n - 1)^2 - x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

所以

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} = 6 - \left(\frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}\right).$$

例 5.18 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.

解 由于 $(2n-1)!! = \frac{2n!}{2^n \cdot n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}}$

$$= \sqrt{2}(2n)^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}} \quad (\text{其中 } |\theta| < 1, 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1).$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2} \cdot 2ne^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = \frac{e}{2}.$$



练习

1. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n^5 - n + 2}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{5/4}}.$$

2. 判断下列级数的敛散性, 是条件收敛还是绝对收敛:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\tan \frac{1}{n^p} - \frac{1}{n^p} \right);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}.$$

3. 设 $a_n = \int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的敛散性.

4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n + \sin n) x^{2n}$ 的收敛域.

6. 将 $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展开为麦克劳林级数.

7. 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = \frac{\pi}{4}$.

8. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

9. 利用级数求下列定积分的值:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1};$$

$$(2) \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$$

$$10. \text{ 证明 } \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$11. \text{ 证明 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = \sin(\sin\theta) e^{\cos\theta}.$$

$$12. \text{ 求级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx} \text{ 的收敛域.}$$

第六讲 向量运算和空间解析几何



知识要点

(一) 向量的运算及性质

1. 向量的数量积: 已知向量 a, b , 设其夹角为 θ , 乘积 $|a| |b| \cos\theta$ 称为向量 a 与 b 的数量积, 记为 $a \cdot b$, 即 $a \cdot b = |a| |b| \cos\theta$.

数量积的运算规律:

- (a) $a \cdot b = b \cdot a$;
- (b) $m(a \cdot b) = (ma) \cdot b = a \cdot (mb)$;
- (c) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

其中 m 为数.

2. 向量的向量积: 已知向量 a, b , 夹角为 θ , 则它们的向量积 c 满足以下条件:

- (a) c 与 a, b 都垂直, 其方向按从 a 经角 θ 到 b 的右手定则所确定;
- (b) c 的大小为 $|c| = |a| |b| \sin\theta$; 记 $c = a \times b$; 向量积又称外积或叉积.

向量积的运算规律:

- (a) $m(a \times b) = (ma) \times b = a \times (mb)$;
- (b) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

其中 m 为数.

定理 6.1 两向量 a, b 相互垂直的充要条件是它们的数量积等于零, 即

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0.$$

定理 6.2 两向量 a, b 相互平行的充要条件是它们的向量积等于零向量, 即

$$a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0.$$

(二) 直线、平面方程

1. 直线方程

(a) 一般形式(面交式): $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, 两平面的法向量分别为 $n_1 =$

$$\{A_1, B_1, C_1\}, n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}, n_1 \text{ 与 } n_2 \text{ 不平行; 该直线的方向向量 } T = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

(b) 点向式(对称式): $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, (x_0, y_0, z_0) 为直线上一点, $T = \{l, m, n\}$ 为直线的方向向量, l, m, n 不全为零.

(c) 参数式: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt, t \in (-\infty, +\infty)$ 为参数, (x_0, y_0, z_0) 与 $\{l, m, n\}$ 意义见点向式.

(d) 两点式: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, P_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$ 为直线上两点.

2. 平面方程

(a) 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0, n = \{A, B, C\}$ 为平面的法向量. 若 $A = 0$, 平面平行于 x 轴; $A = B = 0$, 平面平行于 xOy 平面; $D = 0$, 平面经过原点.

(b) 点法式: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, n = \{A, B, C\}$ 为平面法向量, (x_0, y_0, z_0) 为平面上一个点.

(c) 三点式: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3)$ 为平面上不

共线的三个点.

(d) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, a, b, c$ 均不为 0, 分别为平面在 x, y, z 轴上的截距.

3. 重要公式

(a) 点到直线距离公式: 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 的距离

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

其中, 外层 $|\cdot|$ 表示绝对值, 内层 $|\cdot|$ 表示行列式.

(b) 不平行直线间距离公式: 两不平行直线 $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ 与 $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ 间的(最短)距离

$$d = \frac{|M_1 M_2 \cdot (T_1 \times T_2)|}{|T_1 \times T_2|}.$$

其中 M_1, M_2 分别为两直线上各任取一点, $T_1 = \{l_1, m_1, n_1\}, T_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$.

(c) 点到面距离公式: 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(d) 平行平面间距离公式: 两平行平面 $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 与 $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 间的距离

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(三) 曲线、曲面方程

1. 空间曲线

(a) 一般式(面交式): 若两曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$ 交成曲线 L , 则 L 可用 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 表示, 称为曲面的一般式.

(b) 参数式: 把空间曲线上的任何点的直角坐标 (x, y, z) 分别表示为 t 的函数, 其形式为 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t). \end{cases}$

2. 曲面方程

(a) 二次曲面的标准形式:

椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(+++);$

单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1(++-);$

双叶双曲面: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(- - +);$

椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz(++0);$

双曲抛物面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz(+ - 0);$

二次锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0(++-),$

其中 a, b, c 均为正常数, 括号里的符号表示二次项前的系数的符号.

(b) 球面: 球心在点 (a, b, c) 上、半径为 R 的球面方程一般式为:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

(c) 空间曲线绕坐标轴旋转的旋转面方程: 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 绕 z 轴旋转的旋转面方程为

$$x^2 + y^2 = (x(\varphi(z)))^2 + (y(\varphi(z)))^2.$$

其中, 设 $z = z(t)$ 存在单值的反函数 $t = \varphi(z)$, $z \in Z$ 为 $z(t)$ 的值域.

(d) 柱面: 以曲线 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y) = 0$.

母线平行于 y 轴或平行于 x 轴的类似.



例题分析

例 6.1 求过直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 并且与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 交成二面角

为 $\frac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解 经过直线 $L: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$ 的平面束方程可写成

$$(x + 5y + z) + \lambda(x - z + 4) = 0.$$

改写成

$$(1 + \lambda)x + 5y + (1 - \lambda)z + 4\lambda = 0.$$

它与另一平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 交成的二面角为 $\frac{\pi}{4}$, 于是有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|\{(1 + \lambda), 5, (1 - \lambda)\} \cdot \{1, -4, -8\}|}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 + 5^2 + (1 - \lambda)^2} \sqrt{1 + 16 + 64}}.$$

即

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9|\lambda - 3|}{9\sqrt{2\lambda^2 + 27}}.$$

解得 $\lambda = -\frac{3}{4}$, 得平面方程 $x + 20y + 7z - 12 = 0$.

由于按几何意义, 这种平面应该有两个, 而平面束方程 $(x + 5y + z) + \lambda(x - z + 4) = 0$ 中不包含 $x - z + 4 = 0$ 这个平面, 而经过验证, 这个平面恰好与平面 $x - 4y - 8z + 12 = 0$ 的交角是 $\frac{\pi}{4}$, 所以所求平面方程为

$$x + 20y + 7z - 12 = 0, \quad x - 4y - 8z + 12 = 0.$$

例 6.2 求过点 $M(2, 1, 3)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直并相交的直线方程.

解 过点 M 作平面 P , 它与 L 垂直:

$$3(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0.$$

即 P :

$$3x + 2y - z - 5 = 0.$$

P 与 L 的交点 $P_1\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$, 由两点式得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

例 6.3 求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 作经过 l 并垂直于 π 的平面, 与 π 的交线便是 l 在 π 上的投影线 l_0 . l 的方程可写成 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$,

经过 l 的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0.$$

即

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

它与 π 垂直, 故

$$1 \cdot 1 - (\lambda - 1) + 2\lambda = 0, \quad \lambda = -2.$$

所求 l_0 为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$, 将 l_0 改写成 $\begin{cases} x=2y \\ z=-\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$; 绕 y 轴旋转, 则 y 坐标不变, $\sqrt{x^2+z^2}$ 为旋转半径, 从而有

$$\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{(2y)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2}.$$

即所求旋转面方程为

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0.$$

例 6.4 求经过点 $M(2, -1, 3)$, 平行于平面 $P: x-y+z=1$, 并且与直线 $L: x=-1+t, y=3+t, z=2t$ 相交的直线方程 (t 为参数).

解 经过点 M 且平行于 P 的平面方程为

$$P_1: (x-2) - (y+1) + (z-3) = 0.$$

即

$$x-y+z-6=0.$$

所求直线必须在此平面上, 并且与 L 相交, 故交点必是 P_1 与 L 的交点, 将 L 的参数式代入 P_1 方程, 得 $t=5$, 故交点坐标 $M_1(4, 8, 10)$, 经过 M_1, M 的直线方程为

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y+1}{8+1} = \frac{z-3}{10-3}.$$

即所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-3}{7}.$$

例 6.5 求曲线 $(x+2)^2 - z^2 = 4$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 在 yOz 平面上的投影曲线方程.

解 两方程消去 x 即得投影柱面, 再与 $x=0$ 联立便得投影于 yOz 平面的投影曲线方程.

两式相减便得 $x = (y^2 + z^2)/8$, 代入第一式便得

$$\frac{(y^2 + z^2 + 16)^2}{64} - z^2 = 4.$$

化简后得 $(y^2 + z^2)^2 + 32(y^2 - z^2) = 0$, 因而在 yOz 平面上的投影曲线为双扭线:

$$\begin{cases} (y^2 + z^2)^2 = 32(z^2 - y^2) \\ x = 0 \end{cases}$$

例 6.6 求过 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,1)$ 两点的直线, 绕 Ox 轴旋转生成的旋转曲面方程.

解 过 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,1)$ 两点的直线的参数方程是 $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, 消去 t , 解出 x ,

y 得 $x = 1-z$, $y = z$, 于是得

$$x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2.$$

这就是所求旋转曲面方程.

例 6.7 求两直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 的公垂线 L 的方程.

解 $L \perp L_1$, $L \perp L_2$, 所以 L 的方向向量 $T = \{1, 0, -1\} \times \{2, 1, 1\} = \{1, -3, 1\}$.

L 与 L_1 是共面的, 此平面记为 P_1 , 其法向量 $n_1 = \{1, -3, 1\} \times \{1, 0, -1\} = \{3, 2, 3\}$.

同理, L 与 L_2 决定的平面记为 P_2 , 其法向量 $n_2 = \{1, -3, 1\} \times \{2, 1, 1\} = \{-4, 1, 7\}$.

分别在 L_1, L_2 各取一点 $(1, 2, 3)$ 与 $(-2, 1, 0)$, 于是得 P_1, P_2 方程如下, 联立即为公垂线方程

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z - 16 = 0 \\ 4x - y - 7z + 9 = 0 \end{cases}$$

例 6.8 求曲线 $L: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = a$ 的一种参数式.

解 两式消去 z 得

$$x^2 + xy + y^2 - ax - ay = 0,$$

由几何意义知,投影曲线是一个椭圆,为求其参数式,作变换

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi + \eta), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\xi - \eta). \end{cases}$$

由线性代数知,它是正交变换,相当于坐标轴旋转,代入经简单计算,化为

$$\frac{\left(\xi - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2} = 1,$$

于是引入参数 t , 命

$$\begin{cases} \xi = \frac{\sqrt{2}}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a \cos t, \\ \eta = \sqrt{\frac{2}{3}}a \sin t. \end{cases}$$

从而可得 x, y , 再代入 $x + y + z = a$, 使得 L 的参数方程:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \cos t + \frac{a}{\sqrt{3}} \sin t, \\ y = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \cos t - \frac{a}{\sqrt{3}} \sin t, \\ z = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}a \cos t. \end{cases}$$



练习题

1. 求原点到直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}$ 的距离.
2. 求直线 $L_1: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 之间的距离.
3. 求平行于平面 $4x-2y+z=8$ 且与三坐标平面围成的四面体的体积为 $a^3 (a>0)$ 的平面方程.
4. 设球面 $x^2+y^2+z^2-2ax+2y-2z+a^2+2-R^2=0$ 与平面 $x+2y-2z+7=0$, $2x-y+2z+9=0$ 都相切, 求 a 和 R .
5. 试求通过点 $(-2, 0, 0)$ 和 $(0, -2, 0)$ 且与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 交成抛物线的平面方程.
6. 求锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围成立体在三个坐标面上的投影.

第七讲 多元函数的可微性与偏导数



知识要点

(一) 可微与偏导

1. 定义 7.1 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义, 对于 $U(P_0)$ 中的点 $P(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, 若函数 f 在点 P_0 处的全增量 Δz 可表示为:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)\end{aligned}$$

其中 A, B 是仅与点 P_0 有关的常数, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量, 则称函数 f 在点 P_0 可微.

称上面式中关于 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 f 在点 P_0 的全微分, 记作:

$$dz|_{P_0} = df(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$

2. 定义 7.2 设函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$, 若 $(x_0, y_0) \in D$, 且 $f(x, y_0)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 则当极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在时, 称这个极限为函数 f 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的偏导数, 记作

$$f_x(x_0, y_0) \text{ 或 } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

3. 定义 7.3 如果函数 $f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ (仍是 x, y 的函数) 继续可求偏导数, 则称 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 的偏导数为 $f(x, y)$ 的二阶偏导数; 类似可定义 $k(k \geq 3)$ 阶偏导数的概念. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. 在高阶偏导数中, 相继对两个(或多于两个)自变量求偏导数所得的高阶偏导数统称为混合偏导数.

(二) 复合函数微分法

1. 复合函数求导法则: 设函数 $x = \phi(s, t), y = \psi(s, t)$ 在点 $(s, t) \in D$ 可微, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(x, y) = (\phi(s, t), \psi(s, t))$ 可微, 则复合函数 $z = f(\phi(s, t), \psi(s, t))$ 在点 (s, t) 可微, 且它关于 s 与 t 的偏导数分别为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_{(s, t)} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x, y)} \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{(s, t)} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x, y)} \left. \frac{\partial y}{\partial s} \right|_{(s, t)},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{(s,t)} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x,y)} \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(s,t)} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x,y)} \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(s,t)}.$$

2. 全微分形式不变性: 设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, 则它有全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$, 当函数 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 均有连续偏导数, 则有全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

(三) 方向导数与梯度

1. 定义 7.4 设三元函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域 $U(P_0) \subset \mathbf{R}^3$ 内有定义. l 为从点 P_0 出发的射线, $P(x, y, z)$ 为 l 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点, 以 ρ 表示 P 与 P_0 两点间的距离. 若极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在, 则称此极限为函数 f 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数, 记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}$, $f_l(P_0)$ 或 $f_l(x_0, y_0, z_0)$.

2. 方向导数的计算: 若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则 f 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且

$$f_l(P_0) = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦.

3. 定义 7.5 若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 存在对所有自变量的偏导数, 称向量 $(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ 为函数 f 在点 P_0 的梯度, 记作

$$\text{grad} f = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)).$$

注 若记 l 方向上的单位向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,

梯度的大小为 $|\text{grad} f| = \sqrt{(f_x(P_0))^2 + (f_y(P_0))^2 + (f_z(P_0))^2}$.

方向导数又可写成 $f_l(P_0) = \text{grad} f \cdot l = |\text{grad} f(P_0)| \cos\theta$,

其中, θ 是 l 与 $\text{grad} f(P_0)$ 的夹角.

例题分析

例 7.1 求函数的全微分:

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2 - xy; \quad (2) f(x, y, z) = xyz.$$

解 (1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x,$

故: $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (2x - y)dx + (2y - x)dy.$

$$(2) \frac{\partial f}{\partial x} = yz, \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

$$\text{故: } df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz.$$

例 7.2 求函数的一阶和二阶偏导数: $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$$\text{解 } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

由对称性, 可得:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\text{例 7.3 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明: $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 并求 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$.

解 令 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 则

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2(\rho \cos^3 \theta + \sin^2 \theta)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(\rho \cos^3 \theta + \sin^2 \theta) = 0 = f(0, 0),$$

故 f 在 $(0, 0)$ 连续.

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cdot |x|} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y \cdot |y|}, \text{ 不存在.}$$

评注 分段函数在分段点的偏导数要利用定义求.

$$\text{例 7.4 证明: } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ 在 } (0, 0) \text{ 处}$$

连续且偏导数存在, 但偏导数在 $(0, 0)$ 处不连续, 而 f 在原点 $(0, 0)$ 可微.

$$\text{证明 (1) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) = 0, \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 为有界量,}$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, 所以在 $(0,0)$ 点连续.

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$f_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_y(x,y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{|x|}}{x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin \frac{1}{|y|}}{y} = 0.$$

$$\text{而 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

考虑沿 $y = kx$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x| \sqrt{1+k^2}}$, 不存在.

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$ 不存在, 同理, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y)$ 也不存在.

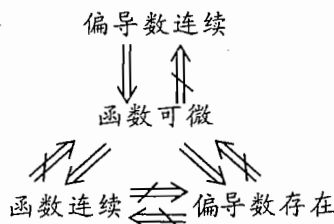
所以, f 在 $(0,0)$ 处偏导数存在但偏导数在该点不连续.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \end{aligned}$$

故 $f(x,y) - f(0,0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$

所以 f 在 $(0,0)$ 处可微.

评注 函数的连续性、可微性, 偏导数的存在性、连续性之间的关系如下图所示:



例 7.5 证明: 若二元函数 f 在 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 内偏导数 f_x 与 f_y 有界, 则 f 在 $U(P)$ 内连续.

证明 $\forall (x, y) \in U(P)$,

因有界, $\exists M > 0$, $|f_x(x, y)| \leq M$, $|f_y(x, y)| \leq M$.

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|$$

$$\leq |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)| + |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)|.$$

由中值定理, 存在 ζ 介于 x 与 $x + \Delta x$ 之间, η 介于 y 与 $y + \Delta y$ 之间,

$$\text{上式} \leq |f_x(\zeta, y + \Delta y)| \cdot |\Delta x| + |f_y(x, \eta)| \cdot |\Delta y|$$

$$\leq M(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

$(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $M(|\Delta x| + |\Delta y|) \rightarrow 0$.

故 $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y)$, 即 f 在 $U(P)$ 内连续.

例 7.6 设 $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, 若 $x^2 + y^2 \neq 0$ 及 $f(0, 0) = 0$.

证明: $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

$$\text{证明} \quad \text{由于} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0}{x} = -y,$$

$$\text{故 } f_x(0, y) = -y,$$

$$\text{从而 } f_{xy}(0, 0) = \left. \frac{d[f_x(0, y)]}{dy} \right|_{y=0} = -1;$$

$$\text{同法可得 } f_{yx}(0, 0) = \left. \frac{d[f_y(x, 0)]}{dx} \right|_{x=0} = 1.$$

因此, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

评注 混合偏导数相等的充分条件为: $f_{xy}(x, y)$ 与 $f_{yx}(x, y)$ 都在 (x_0, y_0) 处连续.

例 7.7 设 $f(u, v, w)$ 可微, $F(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$. 求 F_x, F_y, F_z .

解 $u = x, v = xy, w = xyz$,

$$F_x = f_u(x, xy, xyz) + y \cdot f_v(x, xy, xyz) + yz \cdot f_w(x, xy, xyz),$$

$$F_y = x f_v(x, xy, xyz) + xz \cdot f_w(x, xy, xyz),$$

$$F_z = xy f_w(x, xy, xyz).$$

评注 对抽象函数求导, 可设中间变量, 以简化计算.

例 7.8 用复合函数微分法计算 $y = x^{x^x}$ 的导数.

解 令 $y = u^v, v = w^x, u = x, w = x$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \left[\frac{\partial v}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = v \cdot u^{v-1} + u^v \ln u [xw^{x-1} + w^x \ln w]$$

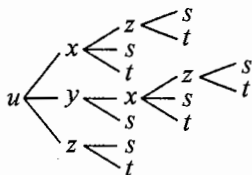
$$= x^x \cdot x^{x^x-1} + x^{x^x} \ln x [x \cdot x^{x-1} + x^x \ln x] = x^x \cdot x^{x^x} \cdot \left[\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2 \right].$$

例 7.9 $u = f(x, y, z), x = \varphi(z, s, t), y = \psi(x, s), z = w(s, t)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}.$$

评注 复杂的多元复合函数求偏导,可借助复合结构图,如本题的复合结构图为:



例 7.10 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 都有连续二阶导数,证明函数 $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足方

程: $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

证明 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\varphi' + \psi - \frac{y}{x}\psi', \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}\varphi' + \psi', \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4}\varphi'' + \frac{2y}{x^3}\varphi' + \frac{y^2}{x^3}\psi'',$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3}\varphi'' - \frac{1}{x^2}\varphi' - \frac{y}{x^2}\psi'', \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\varphi'' + \frac{1}{x}\psi''.$$

代入即得: $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

例 7.11 证明:若 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $d^2 u \geq 0$.

证明 $du = \frac{xdx + ydy + zdz}{u},$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} (xdx + ydy + zdz) \right] = \frac{1}{u} dx^2 - \frac{x}{u^2} dx du.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{u} (xdx + ydy + zdz) \right] = \frac{1}{u} dy^2 - \frac{y}{u^2} dy du.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{u} (xdx + ydy + zdz) \right] = \frac{1}{u} dz^2 - \frac{z}{u^2} dz du.$$

$$d^2 u = \frac{1}{u^2} [u(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx + ydy + zdz)du]$$

$$= \frac{1}{u^3} [(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2].$$

由于 $u > 0$ (在原点处 du 不存在), 故 $d^2 u \geq 0$.

例 7.12 设 $f(x, y, z) \in C^1$, 满足关系式 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) (t > 0)$, 则称 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 求证: $f(x, y, z)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = nf(x, y, z). \quad (7.1)$$

证明 必要性:

$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$, 两边对 t 求导, 得

$$xf'_x(tx, ty, tz) + yf'_y(tx, ty, tz) + zf'_z(tx, ty, tz) = nt^{n-1} f(x, y, z).$$

令 $t = 1$, 即得 (7.1) 式.

充分性:

方法一: 令 $g(t) = f(tx, ty, tz)$, 对 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= xf'_x(tx, ty, tz) + yf'_y(tx, ty, tz) + zf'_z(tx, ty, tz) \\ &= \frac{1}{t} [txf'_x(tx, ty, tz) + tyf'_y(tx, ty, tz) + tzf'_z(tx, ty, tz)] \\ &= \frac{1}{t} nf(tx, ty, tz) = \frac{n}{t} g(t), \end{aligned}$$

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = n \frac{dt}{t}, \text{ 故 } g(t) = Ct^n.$$

而 $C = g(1) = f(x, y, z)$, 故 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$.

方法二: 令 $\varphi(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}$, 对 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{1}{t^n} [xf'_x(tx, ty, tz) + yf'_y(tx, ty, tz) + zf'_z(tx, ty, tz)] - \frac{n}{t^{n+1}} f(tx, ty, tz) \\ &= \frac{1}{t^{n+1}} [txf'_x(tx, ty, tz) + tyf'_y(tx, ty, tz) + tzf'_z(tx, ty, tz) - nf(tx, ty, tz)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\varphi(t) = C$, 则 $\varphi(t) = \varphi(1) = f(x, y, z)$,

即 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$.

例 7.13 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的方向导数, 在怎样的方向上此导数有: (1) 最大的值; (2) 最小的值; (3) 等于 0.

解 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1,$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = \cos \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

(1) 当 $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = 1$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 最大;

(2) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 即 $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 最小;

(3) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ 或 $\alpha = \frac{7}{4}\pi$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$.

例 7.14 求函数 $u = \frac{1}{r}$ (式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处梯度的大小和方向.

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3},$$

$$\text{于是, } \text{gradu} = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right).$$

$$\text{在 } M_0 \text{ 处梯度为 } \text{gradu} = \left(-\frac{x_0}{r_0^3}, -\frac{y_0}{r_0^3}, -\frac{z_0}{r_0^3}\right),$$

其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, 则有

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2} = \frac{1}{r_0^2}.$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{x}) = -\frac{\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{y}) = -\frac{\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{z}) = -\frac{\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{z_0}{r_0}.$$

例 7.15 设 $f(x, y)$ 可微, l_1 与 l_2 是 $\mathbf{R}^2$ 上一组线性无关向量.

试证明: 若 $f_{l_i}(x, y) \equiv 0 (i = 1, 2)$, 则 $f(x, y) \equiv \text{常数}$.

证明 先证: 若处处有 $f_l(x, y) = 0$, l 是 $\mathbf{R}^2$ 上一确定向量,

则 f 在任一平行于 l 的直线上恒为常数.

不妨设 $l = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 考察函数

$$g(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha),$$

其中 (x_0, y_0) 为任一固定点, 则

$$g'(t) = f_x(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) \cdot \sin\alpha$$

$$= f_l(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$$

$$\equiv 0 (t \in \mathbf{R}),$$

则 $g(t)$ 恒为常数, 即 $f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) \equiv f(x_0, y_0)$.

可知 f 在任一平行于 l 的直线上恒为常数.

下证本题: 不妨设 l_1 与 l_2 为单位向量, 则

$$f_{l_i} = \text{grad} f \cdot l_i = 0 \quad (i = 1, 2),$$

且因 l_1 与 l_2 线性无关, 故对任一单位向量 l , 存在不全为 0 的数 a 与 b , 使 $l = al_1 + bl_2$,

从而对 l 有

$$f_l = \text{grad} f \cdot l = \text{grad} f \cdot (al_1 + bl_2) = a \cdot \text{grad} f \cdot l_1 + b \cdot \text{grad} f \cdot l_2 \equiv 0.$$

由前证得结果可知, $f(x, y)$ 在任一直线上的值均为常数.

亦即 $f(x, y) \equiv \text{常数}, (x, y) \in \mathbf{R}^2$.



练习题

1. $u = e^{xy}$, 求一阶和二阶微分.

2. 设 $z = (x + e^y)^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)}$.

3. 已知 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)}$.

4. $f(x, y, z) = \sin[x\sin(y\sin z)]$, 求 f_x, f_y, f_z .

5. 设 $z = f(x + y, x - y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$, 则 (1) 求 dz ; (2) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

7. 设 $z = f(x, y), x = \varphi(y, z)$, 求 $\frac{dz}{dy}$.

8. 设 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$.

9. 设函数 $u(x, y)$ 满足 $u_{xx} - u_{yy} = 0$ 与 $u(x, 2x) = x, u_x(x, 2x) = x^2$, 求 $u_{xx}(x, 2x), u_{xy}(x, 2x), u_{yy}(x, 2x)$.

10. 已知 $x + y^2 = u, y + z^2 = v, x^2 + z = w$, 求 $\frac{\partial x}{\partial u}$ 及 $\frac{\partial x}{\partial v}$.

11. 设 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 考虑函数在原点偏导数的存在性.

12. 设 $f(x, y)$ 可微, $f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = m, f'_y(0, 0) = n, \varphi(t) = f[t, f(t, t)]$, 求 $\varphi'(0)$.

13. 当 $u > 0$ 时 $f(u)$ 有一阶连续导数, $f(1) = 0$, 又 $z = f(e^x - e^y)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, 求 $f(u)$.

14. 设 $z = f(x, y)$, 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 且 $f(x, 0) = x^2$, $f(0, y) = y$, 求 $f(x, y)$.

15. 若 $u = f(x, y, z)$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 1$, 且 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2 y^2 z^2 f'''(xyz)$, 求 u .

16. 设 $f(x), g(x)$ 为连续可微函数, 且 $w = yf(xy)dx + xg(xy)dy$.

(1) 若存在 u 使得 $du = w$, 求 $f(x) - g(x)$;

(2) 若 $f(x) = \varphi'(x)$, 求 u 使得 $du = w$.

17. 试证: 可微函数 $z = f(x, y)$ 是 $ax + by$ ($ab \neq 0$) 的函数的充要条件为 $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$.

18. 设 $f(x, y) = |x - y| \varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的一个邻域内连续, 试证 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $\varphi(0, 0) = 0$.

19. 设 $u(x, y)$ 具有二阶偏导数, 且 $u(x, y) \neq 0$, 证明 $u(x, y) = f(x)g(y)$ 的充要条件为 $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$.

20. 设 $F(x, y)$ 是二次齐次函数, 试证 $x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F$.

21. 设 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 试证:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x, y, z) = n(n-1)f(x, y, z).$$

22. $z = z(x, y)$ 满足 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 设 $\begin{cases} u = x, \\ v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \\ \psi = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}, \end{cases}$ 对函数 $\psi = \psi(u, v)$, 求证

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0.$$

22. 已知 $u = u(x, y)$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, 选择参数 α, β 的值, 利用 $u(x, y) = v(x, y)e^{\alpha x + \beta y}$ 将原方程变形, 使新方程中不出现一阶偏导数.

24. 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, $f(0, 1) = f(1, 0)$, 证明在 $x^2 + y^2 = 1$ 上至少存在两个不同的点满足 $y \frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial f}{\partial y}$.

25. 求常数 a, b, c 的值, 使 $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ 在点 $M(1, 2, -1)$ 处沿 z 轴正向的方向导数有最大值 64.

第八讲 隐函数的微分法



知识要点

(一) 隐函数

1. 隐函数存在唯一性定理:若满足下列条件:

(i) 函数 $F(x, y)$ 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的一某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续;

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$; (通常称这一条件为初始条件)

(iii) 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$;

(iv) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内, 方程 $F(x, y) = 0$ 唯一地确定一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内的隐函数 $y = f(x)$, 使得

(1) $f(x_0) = y_0$, 当 $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时, $(x, f(x)) \in U(P_0)$ 且 $F(x, f(x)) \equiv 0$.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内连续.

2. 隐函数可微性定理: 设函数 $F(x, y)$ 满足隐函数存在唯一性定理的条件, 又设在 D 内 $F_x(x, y)$ 存在且连续, 则隐函数 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内可导, 且

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

(二) 隐函数组

1. 隐函数组定理: 若

(i) $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 为内点的区域 $V \subset \mathbf{R}^4$ 内连续;

(ii) 在 V 内 F, G 具有一阶连续偏导数;

(iii) $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$;

(iv) $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} \neq 0$, 则在 P 的某一邻域内, 方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 唯一确定两个

在 $Q(x_0, y_0)$ 的某邻域内的二元隐函数组 $\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y). \end{cases}$ 使得:

(1) $(x, y, f(x, y), g(x, y)) \in U(P), (x, y) \in U(Q)$.

$\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y)) = 0 \end{cases}, (x, y) \in U(Q), u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = g(x_0, y_0).$

(2) $f(x, y), g(x, y)$ 在 $U(Q)$ 内连续;

(3) $f(x, y), g(x, y)$ 在 $U(Q)$ 内有一阶连续偏导数:

$$u_x = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \quad u_y = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)};$$

$$v_x = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}, \quad v_y = -\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \bigg/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}.$$

2. 反函数组定理: 设函数组 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点, 且

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \neq 0.$$

则在点 $P_0'(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内存在唯一的一组反函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

使得 $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0)$.

且当 $(u, v) \in U(P_0')$ 时, 有

$$(x(u, v), y(u, v)) \in U(P_0).$$

$$u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), v \equiv v(x(u, v), y(u, v)).$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)};$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

(三) 几何应用

1. 平面曲线的切线与法线: 设平面曲线方程为 $F(x, y) = 0$, 有 $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$.

切线方程为 $F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$,

法线方程为 $F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

2. 空间曲线的切线与法平面:

(1) 曲线由参数式给出:

$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta$. 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 L 上.

切线方程为 $\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$.

法平面方程为 $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.

(2) 曲线由两面交线式给出:

设曲线 L 的方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$ 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 L 上.

$$\text{切线方程为 } \frac{x-x_0}{\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \right|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \right|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right|_{P_0}}.$$

$$\text{法平面方程为 } \left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \right|_{P_0} (x-x_0) + \left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \right|_{P_0} (y-y_0) + \left. \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \right|_{P_0} (z-z_0) = 0.$$

3. 曲面的切平面与法线:

设曲面 Σ 的方程为 $F(x, y, z) = 0$, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 Σ 上.

$$\text{切平面方程为 } F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0.$$

$$\text{法线方程为 } \frac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(P_0)}.$$



例题分析

例 8.1 设 $y = f(x)$ 是由方程 $y = x + \arctan y$ 确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 方法一

按复合函数求导法则对方程两边关于 x 求导:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{y^2}.$$

再两边对 x 求导:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y^3} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

方法二

设 $F(x, y) = y - x - \arctan y$,

$$F_x = -1, \quad F_y = 1 - \frac{1}{1+y^2} = \frac{y^2}{1+y^2},$$

$$F_{xx} = 0, \quad F_{xy} = F_{yx} = 0, \quad F_{yy} = \frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{1+y^2}{y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 + F_{yy}F_x^2 - 2F_{xy}F_xF_y}{F_y^3} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

例 8.2 证明由方程 $xy - \ln y = 1$ 所定义的隐函数满足关系式 $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$.

证明 方法一

对 $xy - \ln y = 1$ 两边求全微分:

$$y dx + x dy - \frac{1}{y} dy = 0,$$

化简: $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$.

方法二

设 $F(x, y) = xy - \ln y - 1$,

因 $F_x = y > 0$,

由隐函数定理, 在满足初始条件的点的某邻域内唯一确定隐函数 $x = f(y)$.

由公式 $\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{x - \frac{1}{y}}{y} = \frac{1 - xy}{y^2}$,

即 $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$.

例 8.3 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 函数, 试求 $\frac{dy}{dx}$.

解 方法一

两个方程三个变量隐函数组, 确定了两个一元函数, $y = y(x), t = t(x)$, 方程组 $y = f(x, t), F(x, y, t) = 0$.

两边对 x 求导得
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_x + f_t \frac{dt}{dx}, \\ F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_t \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases}$$

解得: $\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + F_y f_t}$.

方法二

按题设 $F(x, y, t) = 0$ 确定了一个二元函数 $t = t(x, y), F(x, y, t) = 0$, 两边对 x 求导得

$$F_x + F_t \cdot t_x = 0, \quad \text{即 } t_x = -\frac{F_x}{F_t}. \quad (8.1)$$

$F(x, y, t) = 0$ 两边对 y 求导得

$$F_y + F_t \cdot t_y = 0, \quad \text{即 } t_y = -\frac{F_y}{F_t}. \quad (8.2)$$

将 $t = t(x, y)$ 代入 $y = f(x, t)$ 中, 有 $y = f(x, t(x, y))$.

此方程又确定了一个一元函数 $y = y(x)$, 将方程 $y = f(x, t(x, y))$ 两边对自变量 x 求导, 得

$$y_x = f_x + f_t \cdot (t_x + t_y y_x),$$

将(8.1)(8.2)式代入上式得:

$$y_x = f_x + f_t \cdot \left[\left(-\frac{F_x}{F_t} \right) + \left(-\frac{F_y}{F_t} \right) \cdot y_x \right],$$

所以 $y_x F_t = f_x F_t - f_t F_x - f_t F_y y_x$,

$$\text{因此, } y_x = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + F_y f_t}.$$

评注 对隐函数求导问题,关键是分析出隐函数的关系.从本题两个解法可知,隐函数分析可有不同分析方式,方法一是对题目所给多个方程整体分析,方法二是单独分析.若求导前不分析变量关系,极易出错.

例 8.4 设 $y = y(x)$ 为由方程 $x = ky + \varphi(y)$ 所定义的隐函数,其中常数 $k \neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 是以 w 为周期的可微周期函数,且 $|\varphi'(y)| < |k|$. 证明: $y = \frac{x}{k} + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 是以 $|k|w$ 为周期的周期函数.

证明 由于 $x = ky + \varphi(y)$, 故 $\frac{dx}{dy} = k + \varphi'(y)$.

又 $|\varphi'(y)| < |k|$, 故 $\frac{dx}{dy}$ 与 k 同号, 即 x 为 y 的严格单调函数, 且为连续的. 由于 $\varphi(y)$ 是连续的且以 w 为周期的函数, 故有界.

从而, 当 $k > 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} x = +\infty$;

当 $k < 0$ 时, $\lim_{y \rightarrow -\infty} x = +\infty, \lim_{y \rightarrow +\infty} x = -\infty$.

由此可知, 其反函数 $y = y(x)$ 存在唯一, 且是 $-\infty < x < +\infty$ 上有定义的严格单调可微函数.

$$\text{令} \quad y(x) - \frac{x}{k} = \psi(x) \quad (8.3)$$

$$\text{则 } x = ky(x) + \varphi[y(x)], \quad \varphi[y(x) + w] = \varphi[y(x)],$$

$$x + kw = ky(x) + \varphi[y(x)] + kw = k[y(x) + w] + \varphi[y(x) + w].$$

根据反函数的唯一性, 可得

$$y(x + kw) = y(x) + w. \quad (8.4)$$

由 (8.3) 式和 (8.4) 式知

$$\psi(x + kw) = y(x + kw) - \frac{x + kw}{k} = y(x) - \frac{x}{k} = \psi(x).$$

同理可证 $\psi(x - kw) = \psi(x)$.

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|w$ 为周期的可微周期函数. 由 (8.3) 得

$$y = y(x) = \frac{1}{k}x + \psi(x).$$

例 8.5 设 $e^z = xyz$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 方程两边对 x 求导得: $e^z \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy \frac{\partial z}{\partial x}$,

解得, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{xz - x},$

所以, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{xz - x} \right) = \frac{z_x \cdot (xz - x) - z(z + xz_x - 1)}{(xz - x)^2}$ (将 $z_x = \frac{z}{xz - x}$ 代入)

$$= \frac{z(xz - x) - z(z^2x - zx + x - xz + x)}{(xz - x)^3}$$

$$= \frac{-xz^3 + xz^2 - 3xz}{(xz - x)^3} = \frac{-z^3 + z^2 - 3z}{x^2(z - 1)^3}.$$

评注 利用原方程化简计算或化简结果, 是隐函数计算中常用的解题方法.

例 8.6 设 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 求 dz 和 d^2z .

解 等式两边微分一次, 可得

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0.$$

于是, $dz = -\frac{c^2}{z} \left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy \right),$

再将 dz 微分一次, 得

$$d^2z = -\frac{c^2}{z^2} \left[z \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) - \left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy \right) dz \right]$$

$$= -\frac{c^4}{z^3} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}dxdy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right].$$

例 8.7 设 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

解 对 z 求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0. \end{cases}$$

联立求解, 得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

例 8.8 设 $u + v = x + y, \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du, dv, d^2u 和 d^2v .

解 原式改写为 $\begin{cases} u + v = x + y, \\ y \sin u = x \sin v. \end{cases}$

$$\text{微分得} \begin{cases} du + dv = dx + dy, & (8.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin u dy + y \cos u du = \sin v dx + x \cos v dv. & (8.6) \end{cases}$$

联立求解,

$$du = \frac{1}{x\cos v + y\cos u}[(\sin v + x\cos v)dx - (\sin u - x\cos v)dy],$$

$$dv = \frac{1}{x\cos v + y\cos u}[-(\sin v - y\cos u)dx + (\sin u + y\cos u)dy],$$

对(8.5),(8.6)式再微分一次,得

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ y\cos u \cdot d^2u + 2\cos u \cdot dydu - y\sin u \cdot du^2 = x\cos v \cdot d^2v + 2\cos v \cdot dx dv - x\sin v \cdot dv^2. \end{cases}$$

联立求解,

$$d^2u = -d^2v = \frac{1}{x\cos v + y\cos u}[(2\cos v dx - x\sin v dv)dv - (2\cos u dy - y\sin u du)du].$$

例 8.9 设变换 $u = x - 2y, v = x + ay$, 把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. 试求常数 a .

解 将 z 看作中间变量 u, v 的函数, 而 u, v 又是自变量 x, y 的函数, 则

$$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v,$$

$$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = -2z_u + az_v,$$

$$z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv},$$

$$z_{xy} = -2z_{uu} + (a-2)z_{uv} + az_{vv},$$

$$z_{yy} = 4z_{uu} - 4az_{uv} + a^2z_{vv}.$$

代入原方程得

$$(10+5a)z_{uv} + (6+a-a^2)z_{vv} = 0.$$

则应使 $10+5a \neq 0, 6+a-a^2 = 0$, 则 $a = 3$.

例 8.10 设 $z = z(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续一阶偏导数, $w = w(u, v)$ 是由方程组 $u = x^2 + y^2, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, z = e^{u+x+y}$ 所确定的隐函数, 试将方程 $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x) \cdot z$

($x \neq y$) 化为 $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ 所满足的一个关系式.

解 将 $z(x, y)$ 看作由函数

$$z = z(x, y, w) = e^{u+x+y}, w = w(u, v),$$

$$u = u(x, y) = x^2 + y^2, v = v(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

复合而成函数, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_1 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = z \left(1 + 2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_2 + z_3 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = z \left(1 + 2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right).$$

代入原方程化简得, $z \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

由题设知, $z \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right) = \frac{z(x^3 - y^3)}{x^2 y^2} \neq 0$,

故可化为 $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

$$\text{例 8.11 设有方程 } \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1, \quad (8.7)$$

$$\text{试证: } |\operatorname{gradu}|^2 = 2\mathbf{A} \cdot \operatorname{gradu}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = (x, y, z). \quad (8.8)$$

证明 (8.8) 式等价于

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z). \quad (8.9)$$

因此本题转化为由(8.7)式证明(8.9)式成立.

由(8.7)式定义了一个三元函数 $u = u(x, y, z)$, 将(8.7)式对 x 求导得

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + u)2x - x^2 u_x}{(a^2 + u)^2} - \frac{y^2 u_x}{(b^2 + u)^2} - \frac{z^2 u_x}{(c^2 + u)^2} &= 0, \\ \frac{2x}{a^2 + u} &= \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] u_x. \end{aligned} \quad (8.10)$$

由轮换对称性, 有

$$\frac{2y}{b^2 + u} = \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] u_y, \quad (8.11)$$

$$\frac{2z}{c^2 + u} = \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] u_z. \quad (8.12)$$

(8.10)(8.11)(8.12) 式平方后相加, 并在等式两端约去公因子, 得

$$4 = \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2). \quad (8.13)$$

(8.10)(8.11)(8.12) 式分别乘以 x, y, z 后相加, 结合(8.7)式, 得

$$2 = \left[\frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] (xu_x + yu_y + zu_z). \quad (8.14)$$

将(8.13)(8.14)式联立, 即得(8.9)式, 从而(8.8)式成立.

评注 梯度计算与隐函数求导结合, 增加难度.

$$\text{例 8.12 求函数 } u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ 在点 } M(1, 2, -2) \text{ 处沿曲线 } x = t, y = 2t^2,$$

$z = -2t^4$ 在该点切线方向的方向导数.

解 $u_x(1, 2, -2) = \frac{8}{27}, \quad u_y(1, 2, -2) = -\frac{2}{27}, \quad u_z(1, 2, -2) = \frac{2}{27},$

M 代入曲线方程, 则 $t = 1$.

则曲线在 M 处的切向量为 $\tau = \pm(1, 4t, -8t^2) = \pm(1, 4, -8),$

单位化可得 $\tau^0 = \pm \frac{1}{9}(1, 4, -8).$

方向导数为 $\left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_M = \text{grad} u \Big|_M \cdot \tau^0 = \pm \frac{16}{243}.$

例 8.13 求证曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 的切平面通过一定点.

证明 由方程 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$, 令 $F(x, y, z) = f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right),$

有 $F_x = f_1 \cdot \frac{1}{z-c}, \quad F_y = f_2 \cdot \frac{1}{z-c},$

$$F_z = -\frac{1}{(z-c)^2}[f_1 \cdot (x-a) + f_2 \cdot (y-b)],$$

其切平面方程为

$$\frac{f_1}{z-c}(X-x) + \frac{f_2}{z-c}(Y-y) - \frac{(x-a)f_1 + (y-b)f_2}{(z-c)^2}(Z-z) = 0,$$

$$\text{即} [(z-c)(X-x) - (x-a)(Z-z)]f_1 + [(z-c)(Y-y) - (y-b)(Z-z)]f_2 = 0,$$

显然, 当 $(X, Y, Z) = (a, b, c)$ 时, 上式恒成立.

评注 所谓定点就是三个坐标均为常数的点; 对抽象函数求导可把中间变量按顺序简记为 1, 2, 3 等, 以简化计算.

例 8.14 确定正数 λ , 使曲面 $xyz = \lambda$ 与椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在某点相切 (即有公共切平面).

解 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为相切点, 则它们在 P_0 处法向量

$$n_1 = (y_0 z_0, z_0 x_0, x_0 y_0), n_2 = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right) \text{ 互相平行,}$$

$$\text{故 } \frac{x_0}{a^2} / y_0 z_0 = \frac{y_0}{b^2} / z_0 x_0 = \frac{z_0}{c^2} / x_0 y_0,$$

$$\text{即 } \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2},$$

$$\text{代入方程 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{得 } P_0(x_0, y_0, z_0) = \pm \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\lambda \Rightarrow x_0 y_0 z_0 = \pm \frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

例 8.15 证明: 曲面 $xyz = a^3 (a > 0)$ 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

证明 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0.$$

它与各坐标面的交点为 $A(3x_0, 0, 0), B(0, 3y_0, 0), C(0, 0, 3z_0)$,

注意到各坐标轴的垂直关系, 即知以 A, B, C, O 诸点为顶点的四面体的体积为

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} OC \cdot \left(\frac{1}{2} OA \cdot OB \right) = \frac{1}{6} 3z_0 \cdot 3x_0 \cdot 3y_0 = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0 = \frac{9}{2} a^3.$$

上式为一个常数, 得证.



练习题

1. 设 $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$, z 是 x, y 的函数, 求 dz .

2. 设 $z = f(x, y)$, $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$, 且 f 的一阶偏导连续, 求 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

3. 设 $y = y(x)$ 是 $xy + e^y = x + 1$ 所确定的隐函数, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

4. 设 y 是由 $y^3(x + y) = x^3$ 所确定的隐函数, 求 $\int \frac{dx}{y^3}$.

5. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^t \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0 \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{ 的解, 求 } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

6. 求曲线 $\sin xy + \ln(y - x) = x$ 点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

7. 试证曲面 $z = x + f(y - z)$ 的所有切平面恒与一定直线平行 (其中 f 可微).

8. 证明: 曲面 $z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x^3 f\left(\frac{y}{x}\right)$ 任意点处的切平面在 Oz 轴上的截距与切点到坐标原点的距离之比为常数, 并求此常数.

9. 在 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上求一点, 使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角.

10. 求过直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y - z = 5, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 且与曲面 $2x^2 - xy^2 + 2z = \frac{5}{8}$ 相切的平面 π 的方程.

第九讲 极值问题



知识要点

(一) 泰勒(Taylor)公式

1. 中值定理: 设二元函数 f 在凸区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 在 D 的所有内点处可微. 则对 D 内任意两点 $P(a, b), Q(a+h, b+k) \in D$, 存在 $\theta (0 < \theta < 1)$, 使

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_x(a+\theta h, b+\theta k)h + f_y(a+\theta h, b+\theta k)k.$$

2. 泰勒公式: 若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $Y(P_0)$ 内有直到 $n+1$ 阶连续偏导数, 则对 $Y(P_0)$ 内任一点 (x_0+h, y_0+k) , 存在相应的 $\theta \in (0, 1)$, 使

$$f(x_0+h, y_0+k) =$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

其中等号右边加式的最后一项可简记为 $R_n(x, y)$.

(二) 极值存在条件

1. 定义 9.1 若函数 f 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $Y(P_0)$ 内有定义, 若对于任何点 $P(x, y) \in Y(P_0)$, 成立不等式: $f(P) \leq f(P_0)$ (或 $f(P) \geq f(P_0)$), 则称函数 f 在点 P_0 取得极大(或极小)值, 点 P_0 称为 f 的极大(或极小)值点. 极大值、极小值统称为极值. 极大值点、极小值点统称为极值点.

2. 极值的必要条件: 设 P_0 为函数 $f(P)$ 的极值点, 则当 f 在点 P_0 存在偏导数时, 有

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0.$$

3. 极值的充分条件: 设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 某邻域有二阶连续偏导数, 当 P_0 为稳定点(即驻点)时, 则

(1) $f_{xx}(P_0) > 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, P_0 为极小值点;

(2) $f_{xx}(P_0) < 0, (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) > 0$ 时, P_0 为极大值点;

(3) $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) < 0$ 时, P_0 不是极值点;

(4) $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(P_0) = 0$ 时, P_0 可能是极值点, 也可能不是极值点.

(三) 最值问题

1. 最值问题: 和一元函数一样, 最值只可能出现在稳定点、偏导不存在点以及属于区域的界点上, 一起比较这些点处的函数值, 其中最大者(最小者)为最大值(最小值).

(四) 条件极值问题

1. 条件极值问题: 条件极值问题的一般形式是在条件组 $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k = 1, 2, \dots, m (m < n)$ 的约束下, 求目标函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值.

2. 拉格朗日(Lagrange)乘数法: 将求 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的条件极值问题化为求下面拉格朗日函数

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$$

的稳定点问题, 然后根据所讨论的实际问题的特性判断出哪些稳定点是所求的极值.



例题分析

例 9.1 设在区域 D 上函数 f 存在偏导数, 且 $f_x = f_y \equiv 0$.

证明: 在 D 上, $f(x, y) \equiv C$.

证明 $f_x = f_y = 0$, 由中值定理, 对 $(x_0, y_0), \forall (x, y) \in D$,

$$\exists \zeta, \eta, f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\zeta, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0) = 0,$$

故 $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 为常值函数.

例 9.2 设函数 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数且满足方程 $f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$.

证明: 如果 $f(x, y) \neq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 则存在一元函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(y)$, 使 $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$.

证明 令 $g(x) = \frac{f(x, y)}{f(x, 0)}$, 则

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \frac{f(x, y)}{f(x, 0)} - \frac{f(0, y)}{f(0, 0)} \\ &= \frac{f_x(\theta x, y)f(\theta x, 0) - f_x(\theta x, 0)f(\theta x, y)}{f^2(\theta x, 0)} \cdot x \quad (0 < \theta < 1) \\ &= \frac{f(\theta x, y)}{f(\theta x, 0)} \left[\frac{f_x(\theta x, y)}{f(\theta x, y)} - \frac{f_x(\theta x, 0)}{f(\theta x, 0)} \right] \cdot x \\ &= \frac{f(\theta x, y)}{f(\theta x, 0)} \left[\frac{f_{xy}(\theta x, \theta_1 y)f(\theta x, \theta_1 y) - f_x(\theta x, \theta_1 y)f_y(\theta x, \theta_1 y)}{f^2(\theta x, \theta_1 y)} \right]_{xy} \\ &= 0, \quad (0 < \theta_1 < 1) \end{aligned}$$

由此得 $f(x, y) = f(x, 0) \cdot \frac{f(0, y)}{f(0, 0)} = \varphi(x)\psi(y)$.

例 9.3 令 $f(x, t)$ 有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}$, 假设对所有的 x 有 $f(x, 0) > 0$, 证明:

对所有 x 及 t 有 $f(x, t) > 0$.

证明 令 $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, 由中值定理, 存在 ζ 介于 x 与 $x+t$ 之间, η 介于 t 和 0 之间, 有

$$\begin{aligned} f(x, t) - f(x+t, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, \eta)[x - (x+t)] + \frac{\partial f}{\partial t}(\zeta, \eta)(t-0), \\ &= t\left(\frac{\partial f}{\partial t}(\zeta, \eta) - \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, \eta)\right) = 0. \end{aligned}$$

因而 $f(x, t) = f(x+t, 0) > 0$.

例 9.4 在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3,$$

其余三阶混合偏导数均为 0, 所有四阶偏导数均为 0.

因此, $R_3(x, y, z) = 0$, 在点 $A(1, 1, 1)$ 处,

$$f(1, 1, 1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3,$$

于是

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(1, 1, 1) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} \left[(x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} + (z-1) \frac{\partial}{\partial z} \right]^i f(1, 1, 1) \\ &= 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) \\ &\quad - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 \\ &\quad - 3(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

例 9.5 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量, 对于下列二式推出准确到二次项的近似公式:

$$(a) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (b) \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (a) \frac{\cos x}{\cos y} &= \cos x \cdot (1 - \sin^2 y)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 y + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 y\right) \approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} y^2\right) \\ &\approx 1 - \frac{1}{2} (x^2 - y^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \arctan \frac{1+x+y}{1-x+y} &= \arctan \frac{1+\frac{x}{1+y}}{1-\frac{x}{1+y}} = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{x}{1+y} \\ &= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{1+y}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{1+y}\right)^3 + \cdots \\ &\approx \frac{\pi}{4} + x(1-y+y^2) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy. \end{aligned}$$

例 9.6 求函数 $f(x, y) = \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{2y^2}[(x-a)^2 + (y-b)^2]}$ 的极值点与极值 ($a, b \neq 0$).

解 偏导数存在的点为极值点, 其必为驻点, 故先求驻点.

对函数变形, 可使求解较简单, 令

$$F(x, y) = \ln f(x, y) = -2 \ln |y| - \frac{1}{2y^2} [(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

$F(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 有相同的极值点, 令

$$\begin{cases} F_x = -\frac{1}{y^2} (x-a) = 0, \\ F_y = -\frac{2}{y} - \frac{y-b}{y^2} + \frac{1}{y^3} [(x-a)^2 + (y-b)^2] = 0. \end{cases}$$

解得驻点 $x = a, y = -b$ 或 $\frac{b}{2}$, 判断驻点是否为极值点.

$$F_{xx} = -\frac{1}{y^2}, \quad F_{xy} = \frac{2(x-a)}{y^3},$$

$$F_{yy} = \frac{3}{y^2} - \frac{2b}{y^3} + \frac{2(y-b)}{y^3} - \frac{3}{y^4} [(x-a)^2 + (y-b)^2].$$

当 $x = a, y = -b$ 时, $F_{xx} = -\frac{1}{b^2}, F_{xy} = 0, F_{yy} = -\frac{3}{b^2}, (a, -b)$ 为极大值点,

当 $x = a, y = \frac{b}{2}$ 时, $F_{xx} = -\frac{4}{b^2}, F_{xy} = 0, F_{yy} = -\frac{24}{b^2}, \left(a, \frac{b}{2}\right)$ 为极大值点,

极大值为 $f(a, -b) = \frac{1}{b^2} e^{-2}, f\left(a, \frac{b}{2}\right) = \frac{4}{b^2} e^{-\frac{1}{2}}.$

评注 通过变形 (如取对数, 去根号等), 将复杂函数转化为简单函数是极值问题中常用技巧.

例 9.7 求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

解 微分得 $(x-1)dx + (y+1)dy + (z-2)dz = 0$,

显见, 当 $x = 1, y = -1$ 时, $dz = 0$, 代入原方程可解得 $z = 6$ 及 $z = -2$.

又 $z = 2$ 时为不可微的, 为判断极值, 求二阶微分, 得

$$dx^2 + dy^2 + (z-2)d^2z + dz^2 = 0.$$

以 $x = 1, y = -1, z = 6$ 代入, 并 $dz = 0$, 得

$$d^2z = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) < 0, \text{ 当 } dx^2 + dy^2 \neq 0 \text{ 时.}$$

故 $x = 1, y = -1$ 时, z 取得极大值 $z = 6$,

同法可得, $x = 1, y = -1$ 时, z 也取得极小值, 且值为 $z = -2$.

评注 求隐函数的极值与求显函数的极值是一样的, 只是要用隐函数的求导法求导数.

例 9.8 证明: 函数 $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证明 解方程组
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -(1 + e^y)\sin x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^y(\cos x - 1 - y) = 0, \end{cases}$$

得 $x = k\pi, y = (-1)^k - 1 (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$,

由于 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (1 + e^y)\cos x, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 2 - y),$

故在点 $(2m\pi, 0) (m = 0, \pm 1, \dots)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -1,$$

$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 2 > 0$, 此时 z 取得极大值.

而在点 $((2m+1)\pi, -2) (m = 0, \pm 1, \dots)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1 + e^{-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-2},$$

$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -e^{-2} - e^{-2} < 0$, 此时 z 无极值.

例 9.9 设 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, 求 $w = (ax + by + cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ 在整个空间上的最大值与最小值.

解 先求驻点:

$$\text{令 } \begin{cases} w_x = 0, \\ w_y = 0, \\ w_z = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2x(ax + by + cz) = a, \\ 2y(ax + by + cz) = b, \\ 2z(ax + by + cz) = c, \end{cases}$$

因此, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = t$, 解得驻点 $P_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}R}, \frac{b}{\sqrt{2}R}, \frac{c}{\sqrt{2}R}\right)$ 与 $P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}R}, -\frac{b}{\sqrt{2}R}, -\frac{c}{\sqrt{2}R}\right)$,
 其中, $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $w(P_1) = \frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, $w(P_2) = -\frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$,

考虑 $\sum_r: x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (r > R)$,

令 $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$,

$\left|w\right|_{\sum_r} = |a\cos\theta\sin\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\varphi|re^{-r^2}$, 因此, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left|w\right|_{\sum_r} = 0$,

所以存在 $M > 0$, 当 $r \geq M$ 时, $\left|w\right|_{\sum_r} < \frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$,

而 w 在 $x^2 + y^2 + z^2 \leq M^2$ 上, 有 $w_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, $w_{\min} = -\frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$,

因而 $\pm \frac{R}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ 也是 w 在整个空间上的最大值与最小值.

评注 无界区域上的最大值与最小值, 可先考察其无限状态下函数的变换趋势, 再把范围缩小到有界闭域讨论.

例 9.10 证明 $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$, 当 $x \geq 0, y \geq 0$.

证明 在第一象限中 ($x \geq 0, y \geq 0$), 将函数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-y}$ 作为考察对象, 判断在哪处可达到最大值.

因为 f 是非负的且不论哪个变量趋于无穷大时, 它均趋于零.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - x^2 - y^2)e^{-x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (2y - x^2 - y^2)e^{-x-y}.$$

f 的稳定点为满足 $2x - x^2 - y^2 = 0 = 2y - x^2 - y^2$ 的 (x, y) ,

则 $x = y$ 及 $2x^2 - 2x = 0$, $2y^2 - 2y = 0$.

因此, 稳定点为 $(1, 1)$ 及 $(0, 0)$, 显然, $(0, 0)$ 不可能为最大值点.

再看 x 轴上有 $f(x, 0) = x^2e^{-x}$, $\frac{df(x, 0)}{dx} = (x^2 - 2x)e^{-x}$,

仅当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时, $\frac{df(x, 0)}{dx} = 0$,

则 $(2, 0)$ 点为最大值点的另一候选者.

同理, $(0, 2)$ 也为一候选者.

$f(1, 1) = 2e^{-2}$, $f(2, 0) = 4e^{-2} = f(0, 2)$,

因此, f 在第一象限中最大值为 $4e^{-2}$.

即 $x \geq 0, y \geq 0$ 时,

$$(x^2 + y^2)e^{-x-y} \leq 4e^{-2}, \quad \frac{x^2 + y^2}{4} \leq e^{x+y-2}.$$

评注 利用最值证明不等式的要点:若求得 f 在区域 D 上的最大值和最小值分别为 a 与 b , 则有不等式 $b \leq f(P) \leq a$ ($P \in D$), 利用此不等式常可证明所需不等式.

例 9.11 求 $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ 在条件 $xyz = 1$ 下的极值, 问该极值是极大值还是极小值.

解 构造拉格朗日函数求解, 令 $L = x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(xyz - 1)$, 则

$$\begin{cases} L_x = 4x^3 + \lambda yz = 0 \\ L_y = 4y^3 + \lambda xz = 0 \\ L_z = 4z^3 + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

解以上方程组, 得解 $(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1)$.

在这些点上, $f(x, y, z) = 3$, 这些点均为极小值, 由于对称性, 只对 $P_1(1, 1, 1)$ 进行验证.

方法一: 化为无条件形式判定.

考虑第一象限, 因在曲面 $xyz = 1$ 上, $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^4 y^4}$,

在 xOy 平面上, 以 $x = \frac{1}{4}, y = 2, x = 2, y = \frac{1}{4}$ 所围有界闭区域 D 的边界上,

$$f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) \geq 16 > 3 = f(P_1).$$

可见, $f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$ 在有界闭区域 D 上的最小值只能在内部达到, 但内部只有唯一驻点 $(1, 1)$, 故该驻点是 $f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$ 在 D 上的最小值点, 即 $f(x, y, z)$ 在条件 $xyz = 1$ 下在 $(1, 1, 1)$ 处取极小值.

方法二: 用二阶微分的符号来判定.

在点 $(1, 1, 1)$ 处, 相应的, $\lambda = -4$, 从而 L 的二阶偏导数在点 $(1, 1, 1)$ 处值为

$$L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = 12, L_{xy} = L_{yz} = L_{zx} = \lambda = -4,$$

因此有公式

$$\begin{aligned} d^2L &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 L \\ &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} dz dx, \end{aligned}$$

$$d^2L(P_1) = 12(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 8(dxdy + dydz + dzdx).$$

由 $xyz = 1$ 知, 在点 P_1 处, $dz = -dx - dy$, 代入上式得

$$\begin{aligned} d^2L(P_1) &= 12(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 8[dxdy + (dy + dx)(-dy - dx)] \\ &= 12(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 4(dx^2 + 2dxdy + dy^2) + 4(dx^2 + dy^2) > 0. \end{aligned}$$

故 f 在 $P_1(1, 1, 1)$ 处取极小值.

评注 求条件极值方法: (1) 化为无条件极值求解; (2) 构造拉格朗日函数求解, 注意的是: 求解得到的点只是可能的极值点, 判定其是否为极值点又可化为无条件形式判定, 或用拉格朗日函数的二阶微分的符号来判定.

例 9.12 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上, 求函数 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ 的最大值, 并利用所得结果证明不等式 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

解 作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + 3\ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5R^2),$$

$$\text{并令} \begin{cases} L_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0 \\ L_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0 \\ L_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 5R^2 = 0 \end{cases}$$

由前 3 式得 $x^2 = y^2 = \frac{z^2}{3}$, 代入第 4 式得稳定点 $(R, R, \sqrt{3}R)$, 因 xyz^3 在有界闭集 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 上必有最大值, 且最大值必在 $x > 0, y > 0, z > 0$ 取得, 故 $f = \ln xyz^3$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2$ 也有最大值, 而 $(R, R, \sqrt{3}R)$ 为唯一稳定点, 故最大值为

$$f(R, R, \sqrt{3}R) = \ln(3\sqrt{3}R^5),$$

$$\text{又 } \ln x + \ln y + 3\ln z \leq \ln(3\sqrt{3}R^5),$$

$$xyz^3 \leq 3\sqrt{3}R^5, \text{ 故 } x^2 y^2 z^5 \leq 27R^{10}.$$

$$\text{令 } x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c, \text{ 又知 } x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2,$$

$$\text{则 } abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

例 9.13 若 $n \geq 1$ 及 $x \geq 0, y \geq 0$, 证明不等式 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n$.

证明 考察 $z = \frac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $x + y = a (a > 0, x \geq 0, y \geq 0)$ 下的极值问题. 设

$$L(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - a).$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} L_x = \frac{n}{2}x^{n-1} + \lambda = 0 \\ L_y = \frac{n}{2}y^{n-1} + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y - a = 0 \end{cases}$$

$$\text{得 } x = y = \frac{a}{2}.$$

将 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ 与边界点 $(0, a), (a, 0)$ 的函数值比较,

$$z(0, a) = z(a, 0) = \frac{a^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) (n > 1),$$

即 z 当 $x + y = a$ 时最小值为 $\left(\frac{a}{2}\right)^n$, 从而有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n, \text{ 当 } x + y = a, x \geq 0, y \geq 0 \text{ 时.} \quad (9.1)$$

当 $x = y = 0$ 时, $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ 显然成立.

当 $x \geq 0, y \geq 0$ 且 x, y 不同时为零时, 令 $x + y = a$, 则 $a > 0$,

由不等式(9.1)即得

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{x + y}{2}\right)^n.$$

例 9.14 设光滑封闭曲面 $S: F(x, y, z) = 0$, 证明: S 上任何两个相距最远点处的切平面互相平行, 且垂直于这两点的连线.

证明 因为 S 是光滑封闭曲面, 故满足:

(1) $F(x, y, z)$ 在一个包含 S 的开域内有连续一阶偏导数, 且 $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$;

(2) S 上必有相距最远的点.

设 $p_0(x_0, y_0, z_0), q_0(u_0, v_0, w_0)$ 为 S 上两个相距最远点, 则点 $\eta_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ 为函数 $f(x, y, z, u, v, w) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2$ 在约束条件 $F(x, y, z) = 0, F(u, v, w) = 0$ 之下的极大值点.

由 Lagrange 乘数法, $\exists \lambda_0, \mu_0$ 使 η_0 成为函数 $L(x, y, z, u, v, w, \lambda, \mu) = f + \lambda F(x, y, z) + \mu F(u, v, w)$ 的稳定点, 从而有

$$\begin{cases} 2(x_0 - u_0) + \lambda_0 F_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ 2(y_0 - v_0) + \lambda_0 F_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ 2(z_0 - w_0) + \lambda_0 F_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ -2(x_0 - u_0) + \mu_0 F_u(u_0, v_0, w_0) = 0 \\ -2(y_0 - v_0) + \mu_0 F_v(u_0, v_0, w_0) = 0 \\ -2(z_0 - w_0) + \mu_0 F_w(u_0, v_0, w_0) = 0 \end{cases}$$

由前 3 式知: $(x_0 - u_0, y_0 - v_0, z_0 - w_0) \parallel (F_x, F_y, F_z)|_{p_0}$.

这说明 S 在点 p_0 处的切平面垂直于 $\overline{p_0 q_0}$,

又由后 3 式知, S 在点 q_0 处的切平面也垂直于 $\overline{p_0 q_0}$,

故 S 在点 p_0, q_0 的切平面互相平行, 且垂直于这两点之间连线 $\overline{p_0 q_0}$.

例 9.15 求证: $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ 在约束条件 $g(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} =$

0 下有最大值和最小值, 且它们是方程 $k^2 - (Aa^2 + Cb^2)k + (AC - B^2)a^2b^2 = 0$ 的根.

证明 因为 $f(x, y)$ 在全平面连续, $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 为有界闭集,

故 $f(x, y)$ 在此约束条件下必有最大值和最小值.

设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 分别为最大值点和最小值点,

$$\text{令 } L(x, y, \lambda) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

则 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 应满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2 \left[\left(A - \frac{\lambda}{a^2} \right) x + By \right] = 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = 2 \left[Bx + \left(C - \frac{\lambda}{b^2} \right) y \right] = 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{cases}$$

记相应乘子为 λ_1, λ_2 , 则 (x_1, y_1, λ_1) 满足

$$\left(A - \frac{\lambda_1}{a^2} \right) x_1 + By_1 = 0, \quad Bx_1 + \left(C - \frac{\lambda_1}{b^2} \right) y_1 = 0$$

$$\text{解得 } \lambda_1 = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2,$$

$$\text{同理 } \lambda_2 = Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2,$$

即 λ_1, λ_2 是 $f(x, y)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的最大值和最小值.

又方程组 (9.2) (9.3) 有非零解, 系数行列式为 0, 即

$$\left(A - \frac{\lambda}{a^2}\right)\left(C - \frac{\lambda}{b^2}\right) - B^2 = 0,$$

化简得 $\lambda^2 - (Aa^2 + Cb^2)\lambda + (AC - B^2)a^2b^2 = 0$,

所以 λ_1, λ_2 是上述方程(即题目所给方程)的根.

评注 连续函数在有界闭域上有最大值和最小值.



练习题

1. 设 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$, 求 $f(x, y)$ 的极值.

2. 求 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

3. 设 $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$), 求极值.

4. 设 $z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a > 0, b > 0$), 求极值.

5. 设 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$, 求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值.

6. 求条件极值点, $z = \cos^2 x + \cos^2 y, x - y = \frac{\pi}{4}$.

7. 求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

8. 在椭球面 $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 内, 求一表面积为最大的内接长方体, 求出其最大表面积.

9. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 间的最短距离.

10. 在 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

11. 当 x, y, z 均大于 0 时, 求 $u = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值, 并证明对任意正实数 a, b, c , 下述不等式成立: $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

12. 已知矩形周长为 $2p$, 将它绕其一边旋转而构成一体积, 求所得体积为最大的那个矩形.

13. 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形: 绕自己的一边旋转时所形成的旋转体体积最大.

14. 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面的最近点和最远点.

15. 已知锐角 $\triangle ABC$, 若取点 $P(x, y)$, 令 $f(x, y) = |AP| + |BP| + |CP|$ ($|\cdot|$ 表示线段长度), 证明在 $f(x, y)$ 取极值的点 P_0 处, 向量 P_0A, P_0B, P_0C 所夹的角相等.

第十讲 重积分



知识要点

(一) 二重积分

1. 定义 10.1 设 $f(x, y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的函数, J 是一个确定的常数, 若对任意 $\epsilon > 0$ 都存在一个 $\delta > 0$, 使得对于 D 的任何分割 T , 当它的细度 $\|T\| < \delta$ 时, 属于 T 的所有积分和都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - J \right| < \epsilon.$$

则称 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 数 J 称为函数 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ 或 } \iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中, $f(x, y)$ 称为二重积分的被积函数, x, y 称为积分变量, D 为积分区域.

2. 二重积分的直接算法:

(1) 设 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 且对每个 $x \in [a, b]$, 积分 $\int_c^d f(x, y) dy$ 存在, 则累次积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 也存在, 且

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

(2) 若 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ 上连续, 其中 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

3. 二重积分的变量代换: 设变换 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 的 Jacobi 式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

其中, D' 是在该变换的逆变换 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 下 xOy 平面上的区域 D 在 uOv 平面上的像. 由条件 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 这里的逆变换是存在的.

4. 二重积分的极坐标变换: 在极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi$ 下, 有 $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r$, 则

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

(二) 三重积分

1. 定义 10.2 设 $f(x,y,z)$ 为定义在三维空间可求体积的有界闭区域 V 上的函数, J 是一个确定的常数, 若对任意 $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得对于 V 的任何分割 T , 只要 $\|T\| < \delta$, 属于分割 T 的所有积分和都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i - J \right| < \epsilon.$$

则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上可积, 常数 J 称为函数 $f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分. 记作

$$\iiint_V f(x,y,z) dv \text{ 或 } \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz.$$

2. 三重积分的直接算法: 若函数 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V = [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$ 上三重积分存在, 且对任何 $x \in [a,b]$, 二重积分 $I(x) = \iint_D f(x,y,z) dy dz$ 存在, 其中 $D = [c,d] \times [e,h]$, 则积分 $\int_a^b dx \iint_D f(x,y,z) dy dz$ 也存在, 且

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_D f(x,y,z) dy dz.$$

3. 三重积分的变量代换: 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 V 上可积, 变换 $T: x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ 将 uvw 空间中的由按片光滑封闭曲面所围成的闭区域 V' 一对一地映成 xyz 空间中的闭区域 V , 函数 $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ 在 V' 内分别具有一阶连续偏导数且 Jacobi 式 $J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0, (u,v,w) \in V'$, 则

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J| du dv dw.$$

4. 三重积分的柱面坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < r < +\infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}, J = r.$$

在柱面坐标变换下 $dx dy dz = r dr d\theta dz$,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

5. 三重积分的球坐标变换:

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}, \quad J = r^2 \sin \varphi.$$

在球坐标变换下 $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$,

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

(三) 重积分的应用

1. 平面面积计算: xOy 平面上域 S 的面积由下列公式给出:

$$S = \iint_S dx dy.$$

2. 柱体体积计算: 设柱体上顶是连续的曲面 $z = f(x, y)$, 下底是平面 $z = 0$, 侧面为从平面 xOy 中的可求面积的区域 Ω 竖起的垂直柱面所界定. 柱体的体积为

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

3. 曲面面积的计算:

(1) 设曲面方程为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, f 有连续的一阶偏导数. 曲面面积公式为

$$S = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos(n, z)|} \quad \text{或} \quad S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy.$$

(2) 若空间曲面 S 由参数方程 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$ 确定, 其中 x, y 和 z 在 D 上具有连续一阶偏导数, 则对于曲面面积有公式

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中, $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

4. 重心的计算: 设 V 是密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 的空间物体, $\rho(x, y, z)$ 在 V 上连续, 则其重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(x, y, z) x dx dy dz,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(x, y, z) y dx dy dz,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V \rho(x, y, z) z dx dy dz.$$

其中, $M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$.

5. 转动惯量的计算: 设 $\rho(x, y, z)$ 是空间物体 V 的密度分布函数, 它在 V 上连续, 则 V 对 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量分别为

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_y = \iiint_V (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

V 对各坐标平面的转动惯量分别为

$$J_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_{zx} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dV.$$

6. 体积计算: 域的体积 V 由下面公式来表示:

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$



例题分析

例 10.1 设 $f(x)$ 为闭区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数, 证明不等式 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$, 此处当且仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.

证明 因为 $0 \leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy$, 故有 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$.

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中等号成立. 反之, 设上式中等号成立, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv$

$0(a \leq x \leq b)$. 特别地, $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数 $G(y) = [f(a) - f(y)]^2$ 是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0(a \leq y \leq b)$. 因此, $f(y) \equiv f(a)(a \leq y \leq b)$, 即 $f(x) = \text{常数}$.

例 10.2 利用中值定理, 估计积分 $I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 的值.

解 由于积分域的面积 200, 故由积分中值定理知

$$I = \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot 200 = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad (10.1)$$

其中, (ξ, η) 为域 $|x| + |y| \leq 10$ 中的某点.

显然 $0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2$, 我们证明必有

$$0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2. \quad (10.2)$$

由于函数 $\cos^2 x + \cos^2 y$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最大值为 2, 最小值为 0. 从而连续函数 $\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最小值为 $\frac{1}{102}$, 最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta = 2$, 则由 (10.1) 式知

$$\iint_{|x|+|y| \leq 10} \left(\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102} \right) dxdy = I - I = 0.$$

但 $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$ 是非负连续函数, 从而必有 $f(x, y) \equiv 0$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上), 即 $\cos^2 x + \cos^2 y \equiv 2$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上). 这显然是错误的.

由此可知, $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$. 同理可证 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta > 0$. 于是, (10.2) 式成立. 从而, $\frac{200}{102}$

$< I < \frac{200}{100}$, 即 $1.96 < I < 2$.

例 10.3 利用函数组 $u = \frac{y^2}{x}, v = \sqrt{xy}$ 把矩形 $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\}$

($a > 0, b > 0$) 变换为域 S' . 求域 S' 的面积与 S 的面积之比. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a, b), B(a+h, b), C(a+h, b+h), D(a, b+h)$ 对应于 uOv 平面上的点 $A'\left(\frac{b^2}{a}, \sqrt{ab}\right), B'\left(\frac{b^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)b}\right), C'\left(\frac{(b+h)^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)(b+h)}\right), D'\left(\frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)}\right)$. 正方形的四边 $y=b, x=a+h, y=b+h, x=a$ 对应于 uOv

平面上的四条曲线,即

$$A'B': u = \frac{b^3}{v^2}; \quad B'C': u = \frac{v^4}{(a+h)^3}; \quad C'D': u = \frac{(b+h)^3}{v^2}; \quad D'A': u = \frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为 S' .

于是,域 S' 的面积为

$$\begin{aligned} S' &= \iint_{S'} du dv \\ &= \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}} \frac{v^4}{a^3} dv + \int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{(b+h)^3}{v^2} dv - \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}} \frac{b^3}{v^2} dv - \int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{v^4}{(a+h)^3} dv \\ &= \frac{1}{5a^3} [\sqrt{a^5(b+h)^5} - \sqrt{a^5b^5}] + (b+h)^3 \left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \right] \\ &\quad - b^3 \left[\frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)b}} \right] - \frac{1}{5(a+h)^3} [\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5} - \sqrt{(a+h)^5b^5}] \\ &= \frac{6}{5} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right]. \end{aligned}$$

从而,域 S' 的面积与 S 的面积之比为

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{6}{5h^2} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right] \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \cdot [\sqrt{a+h} - \sqrt{a}]}{h^2 \sqrt{a(a+h)}} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})(\sqrt{b+h} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{6}{5} \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})}. \end{aligned}$$

上述比式是 h 的函数,并且在 $h=0$ 点连续. 于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5b^2}{4 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上,应用洛比达法则求此极限更简单些,这是因为

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{2} \sqrt{(b+h)^3} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}}. \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (a+h)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

评注 若利用二重积分的变量代换,则计算 S' 较为简单. 容易算得 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned} \text{故} \quad S' &= \iint_S du dv = \iint_S \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx dy = \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}} dy \\ &= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right) (\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}). \end{aligned}$$

与上述结果一致.

例 10.4 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0$.

证明 作变换: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a}} r^{m+n+1} \cos^m \varphi \sin^n \varphi dr d\varphi = \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \right]. \quad (10.3) \end{aligned}$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi = \pi + t$, 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = (-1)^m \cdot (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \sin^n t dt. \quad (10.4)$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = -1$, 因而(10.3)式等于零, 当 m 和 n 均为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = 1$, 因而(10.3)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数, 故积分仍然为零.

总之, 当 m 和 n 中至少一个为奇数时, $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0$.

例 10.5 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

解 方法一

由于对称性, 计算第一象限即可.

曲顶: $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, 区域 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a \right\}$ 为底.

$$V = 8 \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad z = c \sqrt{1 - r^2},$$

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 c \sqrt{1-r^2} ab r dr = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3} abc.$$

当 $a = b = c = R$ 时, 球体积为 $\frac{4\pi}{3} R^3$.

方法二

令 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (ax, by, cz)$. 所给出的体积是 $\mathbf{R}^3$ 中单位球 B 在 f 下的映像, 由于 f 的 Jacobi 处处为 abc , 我们有

$$V(f(B)) = \iiint_{f(B)} dx dy dz = \iiint_B abc dx dy dz = \frac{4}{3} \pi abc.$$

例 10.6 计算 $\iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy$ 的值, 其中 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

解 利用极坐标, 我们有

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-1} - 1) d\theta = \pi(1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

评注 由积分区域和被积函数的特点, 易见用极坐标计算较为方便.

例 10.7 $\iiint_V xyz dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的区域.

$$\begin{aligned} \text{解 } \iiint_V xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

例 10.8 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$ 所界的区域.

解 曲面在 xOy 平面上的射影 Q 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$. 于是

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz &= \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2+y^2} dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^2) r dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

评注 计算重积分时,一般是先画出积分域,再依图按序定出积分限,此法直观,因此常采用.但有时画出积分域并非易事,若按先 z 后 xy 的积分方式,可按以下口诀定出投影到 xOy 平面的区域 D 和 z 的上下限:(1)无 z 消 z 围 D 线(即将围成 V 的曲面方程中不含 z 的方程,及含 z 的方程消去 z 之后得到的方程,共同围成 D);(2)含 z 方程上下限(即将围成 V 的曲面方程中含 z 的方程中分别表达出 z ,就是 z 的上下限).

例 10.9 $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所界的区域.

解 令 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 则曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 化为 $r = \sin \psi$. 从而 $V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi$, 又 $|J| = r^2 \cos \psi$, 于是

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin \psi} r \cdot r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

例 10.10 进行适当的变量代换,以计算三重积分 $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, 此处

V 是椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内部.

解 作变量代换 $x = ar \cos \varphi \cos \psi$, $y = br \sin \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$, 则有 $|J| = abcr^2 \cos \psi$, 且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1$, 于是

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abcr^2 \cos \psi \sqrt{1 - r^2} dr \\ &= 4\pi \int_0^1 abcr^2 \sqrt{1 - r^2} dr = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{\pi abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi^2 abc}{4}. \end{aligned}$$

例 10.11 变换为圆柱坐标,以计算积分 $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ 所界的区域.

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$, 则 $x^2 + y^2 = 2z$ 化为 $r^2 = 2z$,

积分域 $V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2$.

又 $|J| = r$, 于是

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \frac{16\pi}{3}.$$

例 10.12 求函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

解 域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$, 即 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$,

其体积 $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

作变换: $x = r\cos\varphi\cos\psi + \frac{1}{2}$, $y = r\sin\varphi\cos\psi + \frac{1}{2}$, $z = r\sin\psi + \frac{1}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} f_{\text{平均}} &= \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos\psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2 + r\sin\psi + r\cos\varphi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\psi\right) dr \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos\psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2\right) dr = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{20} \cos\psi d\psi \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{3\sqrt{3}}{10} d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

例 10.13 变换为极坐标, 以计算由下列曲线所界的面积:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2.$$

解 曲线的极坐标方程为 $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 及 $r \geq a$. 它们的交点(在第一象限内)为 $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$, 利用对称性, 得所求面积为

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\varphi}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2\cos 2\varphi - a^2) d\varphi = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2.$$

评注 利用二重积分计算平面区域的面积, 根据区域特点, 宜用极坐标计算.

例 10.14 求由下列曲面所界的体积: $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

解 $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + y) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{5}{6}.$

例 10.15 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \leq a)$ 内那部分的面积.

解 因为 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

又积分域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 位于第一象限部分为 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

于是,利用对称性知,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \\ &= 8a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

例 10.16 已知螺旋面 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi$, 求其中 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

解 因为 $E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1$,

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2 + h^2}$.

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2} dr = 2\pi \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h} \right). \end{aligned}$$

例 10.17 求由抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 所围成的均匀立体的重心.

解 设立体 V 的重心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由立体 V 的对称性及均匀性, 有 $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

不妨设 V 的密度为 ρ , 因为

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2, \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{3 - x^2 - y^2} \right\},$$

所以

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_V \rho z dV = \rho \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} dx dy \int_{\frac{x^2 + y^2}{2}}^{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} z dz \\ &= \rho \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} \left(\frac{1}{2} (3 - x^2 - y^2) - \frac{1}{8} (x^2 + y^2)^2 \right) dx dy \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{8} r^4 \right) r dr = \frac{5}{3} \rho \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_V \rho dV = \rho \iint_{x^2+y^2 \leq 2} dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz \\
 &= \rho \iint_{x^2+y^2 \leq 2} \left(\sqrt{3-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{2} \right) dx dy \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \\
 &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{1}{2} r^2 \right) r dr = \frac{6\sqrt{3}-5}{3} \rho \pi,
 \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{5}{83} (6\sqrt{3} + 5).$$

例 10.18 求由下列曲线所界的面 ($\rho=1$) 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y :

$$\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 \quad (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0).$$

解 若设 $b_2 > b_1$, 则

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_0^h y^2 dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} dx = (b_2 - b_1) \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{(b_2 - b_1)h^3}{12}; \\
 I_y &= \int_0^h dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} x^2 dx = \frac{b_2^3 - b_1^3}{3} \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right)^3 dy = \frac{(b_2^3 - b_1^3)h}{12}.
 \end{aligned}$$

$$\text{若设 } b_1 > b_2, \text{ 则 } I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12}, I_y = \frac{(b_1^3 - b_2^3)h}{12}.$$

例 10.19 求由下列曲面所界的体积: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

解 令 $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi, z = z$, 则 r 满足方程 $r^4 + r^2 - 1 = 0$.

$$\text{解得 } r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} ab r dr \int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} dz = 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \\
 &= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.
 \end{aligned}$$



练习题

$$1. \text{ 求积分 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{dy}{1 + (\tan y^2)^{\sqrt{2}}}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, } \int_0^1 f(x) dx = m, \text{ 试求 } \int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z) dx dy dz.$$

3. 计算 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 $D: \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

4. 计算 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

5. 计算 $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$.

6. 计算 $\iint_D \frac{dx dy}{xy}$, 其中 $D: \begin{cases} 2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2} \leq 4, \\ 2 \leq \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4. \end{cases}$

7. 计算 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

8. $f(x, y) = \max(x, y)$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算 $\iint_D f(x, y) |y - x^2| dx dy$.

9. 计算 $\iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{16}} \min \left\{ \sqrt{\frac{3}{16} - x^2 - y^2}, 2(x^2 + y^2) \right\} dx dy$.

10. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

11. 计算 $\iiint_{\Omega} \sin^2 \left[\frac{\pi}{6} (x + y + z) \right] dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

12. 求 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围平面图形面积.

13. 求由曲面 $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = z$, $x = 0$ 所围立体体积.

14. 求 $z = x^2 + y^2 + 1$ 上任意一点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的切平面与抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体体积.

15. $f(x, y)$ 连续, 且 $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy$, 求 $F'(t)$.

16. 试求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^5} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.

17. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(1) 计算 $B = \iint_D |xy - 1| dx dy$;

(2) 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$, $\iint_D xyf(x, y) dx dy = 1$, 试证: 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使 $|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{B}$.

18. 设 $f(x, y)$ 在单位圆上有连续偏导数, 且在边界上取值为零, 求证:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_D \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy = -2\pi f(0, 0), \text{ 其中 } D: \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

19. 设 $f(t)$ 为连续函数, 求证 $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-A}^A f(t)(A-|t|) dt$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}, A \text{ 为正常数}\}$.

20. 设 $f(x)$ 为连续偶函数, 试证: $\iint_D f(x-y) dx dy = 2 \int_0^{2a} [2a-u] f(u) du$, 其中 $D: \begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq a \end{cases} (a > 0)$.

21. 设一球面方程为 $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$, 从原点向球面上任一点 θ 处的切平面作垂线, 垂足为 P , 当 θ 在球面上变动时, P 的轨迹形成一封闭曲面 S , 求 S 所围成的立体 Ω 的体积.

22. 一无盖圆柱形容器, 高为 H 米, 底面半径为 R 米 ($H \leq 2R$), 当容器的底平面倾斜与水平面成 $\frac{\pi}{4}$ 角支撑时, 试问该容器可贮存多少立方米的水?

23. 设有椭圆抛物面 $\Sigma: z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} (p, q > 0)$ 和平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ ($C > 0$).

(1) 试给出 Σ 和 Π 相交的充要条件;

(2) 当 Σ 和 Π 相交时, 求它们所围成空间形体 Ω 的体积和 Π 被 Σ 截下部分的面积.

24. 一个底半径为 1, 高为 6 的开口圆柱形水桶, 在距底为 2 处有两个小孔, 两小孔连线与水桶轴线相交, 试问该桶最多能盛多少水?

25. 设有半径为 R 的定球, 另有一半径为 r 的变球与定球相割 ($r < 2R$), 若变球中心在定球的球面上, 试问 r 为多少时, 含在定球内的变球部分的表面积最大, 并求出最大表面积的值.

第十一讲 曲线积分



知识要点

(一) 第一型曲线积分

(1) 参数方程: 设有光滑曲线 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta]$. $f(x, y)$ 是定义在 L 上的连续函数, ds 为弧的微分, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

(2) 直角方程: 若曲线方程为: $L: y = \psi(x), x \in [a, b]$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx.$$

L 的方程为 $x = \varphi(y)$ 时有类似的公式.

(二) 第二型曲线积分

设光滑或按段光滑曲线 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$. 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 L 上连续, 设曲线 L 的方向是使参数 t 增大的方向. 则沿 L 的方向有

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt.$$

(三) 格林公式

1. 曲线积分与二重积分的关系: 若函数 P 和 Q 在闭区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则有格林公式:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中 L 为区域 D 的正向边界.

2. 曲线积分与路径无关的等价条件:

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是单连通闭区域, 若函数 P 和 Q 在闭区域 D 内连续, 且有连续的一阶偏导数, 则以下四个条件等价:

(i) 沿 D 内任一按段光滑的闭合曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$.

(ii) 对 D 内任一按段光滑的曲线 L , 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关, 只与曲线 L

的起点和终点有关.

(iii) $Pdx + Qdy$ 是 D 内某一函数 u 的全微分, 即在 D 内有

$$du = Pdx + Qdy.$$

(iv) 在 D 内每一点处有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

评注 对于平面区域 D 内一封闭曲线, 皆可经过 D 以外的点而连续收缩于属于 D 的某一点, 则称此区域为单连通域.

3. 恰当微分的原函数:

若有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则称微分形式 $Pdx + Qdy$ 是一个恰当微分. 恰当微分有原函数, 它的一个原函数为:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt,$$

或

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x P(t, y) dt.$$

其中, 点 $(x_0, y_0) \in D$, 当点 $(0, 0) \in D$ 时, 常取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



例题分析

例 11.1 计算 $\int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 方法一

按直角坐标方程计算:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx,$$

$$\begin{aligned} \int_C (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) ds &= 4 \int_0^a \left[x^{\frac{1}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \right] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (2x + a^{\frac{4}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}) dx = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

方法二

按参量方程计算:

令 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$, 则

$$ds = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \cos t \sin t dt \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds &= 4a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a \cos t \sin t dt \\ &= 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}.\end{aligned}$$

例 11.2 计算 $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$.

解 方法一

作代换:

$$u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}, \quad w = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则圆周 C 化为: $u^2 + v^2 + w^2 = a^2, w = 0$.

$$\begin{aligned}\text{于是, } \int_C x^2 ds &= \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds \\ &= \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C (3u^2 + v^2) ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C a^2 ds + \frac{1}{3} \int_C u^2 ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^3 \varphi d\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3.\end{aligned}$$

方法二

由对称性知:

$$\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds,$$

$$\text{于是: } \int_C x^2 ds = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_C ds = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

评注 利用轮换对称性及曲线方程可简化计算.

例 11.3 计算 $\int_L (y^2 + x) \cos xy dx$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 依逆时针方向.

解 方法一

L 的参量方程为: $x = \cos \theta, y = \sin \theta, \theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_L (y^2 + x) \cos xy dx = - \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 \theta + \cos \theta) \cos(\cos \theta \sin \theta) \sin \theta d\theta,$$

因右边定积分的被积函数为 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数,故该定积分等于0.

方法二

令 $f(x, y) = (y^2 + x)\cos xy$, $(x, y) \in L$.

将 L 分为 $L_1: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; 与 $L_2: x^2 + y^2 = 1, y \leq 0$ 两个对称部分.

对于对称点 $(x, y), (x, -y) \in L$, 有

$$f(x, y) = f(x, -y)$$

但在 L_1 上点 (x, y) 处的有向切线与 x 轴正方向成钝角 (即 $dx < 0$), L_2 上点 $(x, -y)$ 处的有向切线与 x 轴正方向成锐角 ($dx > 0$), 故

$$\int_L (y^2 + x)\cos xy dx = 0.$$

评注 积分曲线的对称性, 被积函数的特殊性质, 都可简化计算.

例 11.4 验证被积函数为全微分, 并计算: $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$.

解 $(x+y)dx + (x-y)dy$

$$= (ydx + xdy) + (xdx - ydy)$$

$$= d(xy) + d\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right)$$

$$= d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right),$$

即是全微分.

于是,

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,1)}^{(2,3)} d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) = \left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.$$

例 11.5 证明: 若 $f(u)$ 为连续函数, 且 C 为逐段光滑的封闭围线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

证明 令 $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u)du$, 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F_x(x, y) = xf(x^2 + y^2), F_y(x, y) = yf(x^2 + y^2),$$

且显然 $F_x(x, y), F_y(x, y)$ 都是 x, y 的连续函数, 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$dF(x, y) = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy).$$

于是, 任取 C 上一点 (x_0, y_0) , 有

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} = 0.$$

例 11.6 一质点在力 $F(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 的作用下, 沿直线从原点 $O(0, 0)$ 移动到抛物线 $y = 1 - x^2$ 上一点 $P(u, v) (v \geq 0)$, 分别求出使得力 F 所做的功 W 为最大和最小时, 点 P 所在的位置.

解 直线段 OP 参量方程: $x = ut, y = vt, t \in [0, 1]$,

$$W = \int_{OP} F ds = \int_{OP} y dx + x dy = \int_0^1 2uv t dt = uv.$$

$P(u, v)$ 是 $y = 1 - x^2$ 上的点, 故 $v = 1 - u^2$.

则 $W = u(1 - u^2) = u - u^3, u \in [-1, 1]$.

$$W' = 1 - 3u^2, \text{ 稳定点为 } u = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{故 } W|_{u=-1} = W|_{u=1} = 0, \quad W|_{u=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}, \quad W|_{u=-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

可见: 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{9})$ 点取得最大值, 在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{9})$ 点取得最小值.

例 11.7 应用格林公式计算:

$$(1) \oint_C xy^2 dy - x^2 y dx, \text{ 式中 } C \text{ 为圆周 } x^2 + y^2 = a^2;$$

$$(2) \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)] dy, \text{ 式中 } L: \text{ 曲线 } y = \sin x \text{ 上从 } A(0, 0) \text{ 到 } B(\pi, 0) \text{ 的一段.}$$

解 (1) $P = -x^2 y, Q = xy^2$, 故有

$$\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{2} a^4.$$

$$(2) P = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad Q = y \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x) + xy^2,$$

$$P_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q_x = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y^2.$$

设 D 为 L 与 x 轴所围区域, 则

$$\begin{aligned} \int_L &= \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = - \iint_D y^2 dx dy - \int_{\pi}^0 x dx = - \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y^2 dy + \frac{\pi^2}{2} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) d\cos x + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

评注 对坐标用曲线积分, 当 $Q_x - P_y$ 较简单时, 可考虑用格林公式. 当曲线为封闭曲线时直接用格林公式; 当曲线不是封闭曲线时补充简单曲线, 成为封闭曲线后, 再用格林公式, 所谓简单曲线常常是平行于坐标轴的直线段.

例 11.8 为使 $\int_{A \cup B} F(x, y)(ydx + xdy)$ 与积分路径的形状无关, 则可微分函数 $F(x, y)$ 应满足什么条件?

解 由于 $P = yF(x, y), Q = xF(x, y)$, 故由格林公式知, 所求的条件为:

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)],$$

即
$$xF_x(x, y) = yF_y(x, y).$$

例 11.9 设 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上具有连续的导数, 且 $f(1) = f(4)$, 其中, L 是由 $y = x, y = 4x, xy = 1, xy = 4$ 所围成区域 D 的正向边界, 求 $I = \oint_L \frac{1}{y} f(xy) dy$.

解 由格林公式得

$$I = \oint_L \frac{1}{y} f(xy) dy = \iint_D f'(xy) dx dy.$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, v = xy, J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{x}{2y} = -\frac{1}{2u},$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{1}{y} f(xy) dy = \iint_D f'(xy) dx dy = \int_1^4 du \int_1^4 f'(v) \frac{1}{2u} dv \\ &= \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 1) (f(4) - f(1)) = 0. \end{aligned}$$

例 11.10 计算 $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依正方向进行而不经坐标原点的简单封闭曲线.

解 令 $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 易知, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外, 这时, 在由 C 围成的有界闭区域 S 上, P 与 Q 以及它们的偏导数都连续, 故可用格林公式, 得

$$I = \oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点, 这时, 由于 P, Q 在原点无定义, 故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式, 今取 $a > 0$ 充分小, 使中心在原点半径为 a 的圆周 $L_a: x^2 + y^2 = a^2$ 完

全位于围线 C 之内, 用 S_a 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然, 在 S_a 上, P, Q 及其偏导数均连续, 可用格林公式, 得:

$$(\oint_C + \oint_{-L_a}) P dx + Q dy = \iint_{S_a} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

其中, $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向(即顺时针方向).

$$\text{于是,} \quad I = \oint_C P dx + Q dy = \oint_{L_a} P dx + Q dy,$$

由参数方程 $x = a \cos t, y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$, 即得:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L_a} P dx + Q dy = \oint_{L_a} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(a \cos t) - a \sin t(-a \sin t)] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

评注 注意格林公式的条件, 当曲线所围成区域内有不连续点时, 要在区域内作闭曲线将不连续点挖去.

$$\text{例 11.11} \quad \text{计算积分} \int_L \frac{\left(x - \frac{1}{2} - y\right) dx + \left(x - \frac{1}{2} + y\right) dy}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}, \text{ 其中 } L \text{ 为由 } (0, -1) \text{ 到}$$

$(0, 1)$ 经过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 右半部分的路径.

$$\text{解} \quad \text{记 } P(x, y) = \frac{x - \frac{1}{2} - y}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x - \frac{1}{2} + y}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}.$$

设 L_1 为由 $A(0, -1)$ 到 $B(1, -1)$, 再到 $C(1, 1)$, 最后到 $D(0, 1)$ 的折线段, 因为 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在包含 L 和 L_1 的某个单连通闭区域(不含点 $(\frac{1}{2}, 0)$)上满足曲线积分与路径无关的条件, 所以

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\left(x - \frac{1}{2} - y\right) dx + \left(x - \frac{1}{2} + y\right) dy}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} &= \int_{L_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_{AB} P dx + Q dy + \int_{BC} P dx + Q dy + \int_{CD} P dx + Q dy \\ &= \int_0^1 \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{2} + y}{\frac{1}{4} + y^2} dy + \int_1^0 \frac{x - \frac{3}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{1 + (2y)^2} dy + \int_{-1}^1 \frac{y}{\frac{1}{4} + y^2} dy \\
&= 4\arctan \frac{1}{2} + 2\arctan 2.
\end{aligned}$$

评注 选取积分路径须注意满足曲线积分与路径无关的条件. 如本题选择路径为沿 y 轴从 $(0, -1)$ 到 $(0, 1)$ 的线段 L_2 , 积分非常简单, 但不能用, 因为会使奇点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 属于包含 L 和 L_2 的单连通区域.

例 11.12 设函数 $f(x, y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续, 且 $f(0, 0) = 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 2|x - y|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 2|x - y|$, 求证: $|f(5, 4)| \leq 1$.

证明 因 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, 因此曲线积分 $\int_L \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ 与路径无关, 设 $O(0, 0), A(4, 4), B(5, 4)$, 由条件 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq 2|x - y|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 2|x - y|$, 在直线 $OA: y = x$ 上, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
f(5, 4) - f(0, 0) &= \int_{(0,0)}^{(5,4)} df(x, y) = \int_{(0,0)}^{(5,4)} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\
&= \int_{OA} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \int_{AB} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 + \int_4^5 \frac{\partial f(x, 4)}{\partial x}dx,
\end{aligned}$$

$$\text{而 } f(0, 0) = 0, \text{ 故 } |f(5, 4)| = \left| \int_4^5 \frac{\partial f(x, 4)}{\partial x}dx \right| \leq \int_4^5 2|x - 4|dx = 1.$$

评注 偏导数及曲线积分与路径无关的综合问题.

例 11.13 求下面全微分的原函数: $f(\sqrt{x^2 + y^2})xdx + f(\sqrt{x^2 + y^2})ydy$.

解 所求原函数为

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} f(\sqrt{x^2 + y^2})xdx + f(\sqrt{x^2 + y^2})ydy + C \\
&= \int_0^x f(\sqrt{t^2})tdt + \int_0^y f(\sqrt{x^2 + t^2})tdt + C \\
&= \int_0^{x^2} \frac{1}{2}f(\sqrt{t})dt + \int_{x^2}^{x^2+y^2} \frac{1}{2}f(\sqrt{t})dt + C = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(\sqrt{t})dt + C.
\end{aligned}$$

例 11.14 验证 $\left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy, (x > 0, y > 0)$ 为某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并求 $u(x, y)$ 及 $\int_{(1,1)}^{(2,3)} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy$.

解 $P(x, y) = \frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}, Q(x, y) = \ln x - \frac{x^2}{y^2}, \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, x > 0, y > 0$.

所以 $\left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy$ 为某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分.

方法一

用曲线积分求 $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy + C_1 \\ &= \int_{(1,1)}^{(x,1)} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy + \int_{(x,1)}^{(x,y)} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx \\ &\quad + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy + C_1 \\ &= \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx + \int_1^y \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy + C_1 \\ &= \ln x + x^2 - 1 + (y-1)\ln x + \frac{x^2}{y} - x^2 + C_1 \\ &= y\ln x + \frac{x^2}{y} - 1 + C_1, \end{aligned}$$

所以 $u(x, y) = y\ln x + \frac{x^2}{y} + C$ (C 为任意常数).

方法二

分项组合, 凑微分求 $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy &= \left[\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right] + \left[2 \cdot \frac{x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy\right] \\ &= d(y\ln x) + d\left(\frac{x^2}{y}\right) = d\left(y\ln x + \frac{x^2}{y} + C\right) \end{aligned}$$

所以 $u(x, y) = y\ln x + \frac{x^2}{y} + C$ (C 为任意常数).

方法三

用不定积分求 $u(x, y)$

设 $du = \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}\right)dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right)dy,$

$$\text{即} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y}, \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln x - \frac{x^2}{y^2}, \quad (11.2)$$

$$\text{由(11.1)得} \quad u(x, y) = \int \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y} \right) dx = y \ln x + \frac{x^2}{y} + C(y), \quad (11.3)$$

$$\text{由(11.2)得} \quad u(x, y) = \int \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2} \right) dy = y \ln x + \frac{x^2}{y} + C(x). \quad (11.4)$$

比较(11.3)(11.4), 可知 $C(x) = C(y) = C$ (C 为任意常数),

所以 $u(x, y) = y \ln x + \frac{x^2}{y} + C$ (C 为任意常数).

$$\text{于是} \int_{(1,1)}^{(2,3)} \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \frac{x}{y} \right) dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2} \right) dy = u(x, y) \Big|_{(1,1)}^{(2,3)} = u(2,3) - u(1,1) = 3 \ln 2 + \frac{1}{3}.$$

评注 要证 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 为某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 只需证 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

例 11.15 设 $f(u)$ 为连续函数, L 为平面上逐段光滑的任意闭曲线, 求证:

$$\oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

证明 令 $u = x^2 + y^2$, 则 $du = 2(x dx + y dy)$, 因 $f(u)$ 为连续函数, 故 $F(u) = \int_0^u f(t) dt$ 存在, 且有 $dF(u) = f(u)du = f(x^2 + y^2)2(x dx + y dy)$, 即 $f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = d \frac{F(u)}{2}$, 所以 $\oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$.

评注 如用这样的证明: 因 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf'(x^2 + y^2) = \frac{\partial P}{\partial y}$, 所以 $\oint_L f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0$, 是错误的. 因题中无 $f(u)$ 为可导函数的条件.

例 11.16 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在全平面有连续偏导数, 且对以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 以任意正数 r 为半径的上半圆 $L: x = x_0 + r \cos \theta, y = y_0 + r \sin \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, 恒有 $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. 求证: $P(x, y) \equiv 0, \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv 0$.

证明 设以任意点 (x_0, y_0) 为中心, 以任意正数 r 为半径的上半圆的直径为 AB , 上半圆盘为 D , 则

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{AB+L} P dx + Q dy - \int_L P dx + Q dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \oint_{AB+L} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{二重积分积分中值定理}) \\
 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_1} \iint_D dx dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_1} \frac{\pi r^2}{2},
 \end{aligned}$$

其中, $M_1 \in D$ 为某一点, 另一方面

$$\begin{aligned}
 \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x, y_0) dx \quad (\text{积分中值定理}) \\
 &= P(\xi, y_0) \cdot 2r, \quad (x_0 - r < \xi < x_0 + r),
 \end{aligned}$$

所以
$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{M_1} \frac{\pi r^2}{2} = P(\xi, y_0) \cdot 2r, \quad (11.5)$$

上式对任意 $r > 0$ 成立, 令 $r \rightarrow 0$ 取极限, 得 $P(x_0, y_0) = 0$,

由 (x_0, y_0) 的任意性, 知 $P(x, y) \equiv 0$,

再由 (11.5) 式得, $\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{M_1} = 0, r \rightarrow 0$ 取极限, $\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$,

由 (x_0, y_0) 的任意性, 知 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$.



练习题

1. 设 L 是顺时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 其周长为 l , 求 $\oint_L (xy + x^2 + 4y^2) ds$.
2. 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 求 $\int_L x ds$.
3. 计算 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的一段.
4. 在 xOy 平面上给定三点 $O(0, 0), A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, L 是由 $\triangle AOB$ 的三边组成的一条封闭曲线, 求 $\int_L x \sin y ds$.
5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续导数, 求积分 $\int_C \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$, 其中 C 是从 $A\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 到 $B(1, 2)$ 的直线段.
6. 计算 $\int_{L_+} y dx - (x^2 + y^2 + z^2) dz$, L_+ 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2x + 4, \end{cases}$ 在第一卦限中的部分, 从点 $(0, 1, 4)$ 到 $(1, 0, 6)$.
7. 计算 $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$, 其中 L 是 $x + y + z = 2$ 与 $|x|$

+|y|=1 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

8. 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在全平面内有连续的一阶偏导数,且满足 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 记 C 为包围原点的正向简单闭曲线,计算 $\oint_C \frac{(xv-yu)dx + (xu+yv)dy}{x^2+y^2}$.

9. 设 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 上有二阶连续偏导数,且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$, 证明 $\iint_D \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\pi}{2e}$.

10. 设 L 是不经过点 $(2,0), (-2,0)$ 的分段光滑的简单闭曲线,试就 L 的不同情形计算积分:

$$I = \oint_L \left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2} + \frac{y}{(2+x)^2+y^2} \right] dx + \left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2} - \frac{2+x}{(2+x)^2+y^2} \right] dy$$

(L 取正向).

11. 设 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数,曲线积分 $\oint_C [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)] dx + 2[yg(x) + f(x)] dy = 0$, 其中 C 为平面上任一简单封闭曲线.

(1) 求 $f(x), g(x)$ 使 $f(0) = g(0) = 0$;

(2) 计算沿任一条曲线从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的积分.

12. 设曲线 C 为 $y = \sin x, x \in [0, \pi]$, 试证 $\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2 \leq \int_C x ds \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

13. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线,起点为 (a,b) , 终点为 (c,d) , 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(x,y)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(x,y) - 1] dy.$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时,求 I 的值.

14. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 一阶连续可导,曲线积分 $\int_L 2xy dx + f(x,y) dy$ 与路径无关,且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + f(x,y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + f(x,y) dy.$$

求 $f(x,y)$ 的表达式.

15. 已知 $\oint_L \frac{1}{f(x)+y^2} (xdy - ydx) = A$, 其中 $f \in C', f(1) = 1, L$ 是绕原点一周的任意正向闭曲线,试求 $f(x)$ 及 A .

第十二讲 曲面积分



知识要点

(一) 第一型曲面积分

若 S 为逐片光滑的双面曲面 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$, 而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义且是连续的函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中 $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

特别情形, 设有光滑曲面 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D, f(x, y, z)$ 为 S 上的连续函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

(二) 第二型曲面积分

若 S 为光滑的双面曲面, S^+ 为它的正面, 由法线的方向 $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 所确定的一面, 当 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在曲面 S 上有定义且连续时, 则

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS.$$

特别情形, 设 $R(x, y, z)$ 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

上的连续函数, 以 S 的上侧为正侧 (即 $\cos(\mathbf{n}, z) > 0$), 则有

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

(三) 高斯公式与斯托克斯公式

1. 高斯公式: 设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成. 若函数 P, Q, R 在 V 上连续, 且有连续的一阶偏导数, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

其中 S 取外侧.

2. 斯托克斯公式: 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线. 若函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在 S (连同 L) 上连续, 且有一阶连续的偏导数, 则

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定.

$$\text{也记为} \quad \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \end{vmatrix} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

注 右手螺旋法则, 即当人站在曲面的正侧上, 沿边界曲线 L 行走时, 若曲面在左侧, 则把人的前进方向定为 L 的正向.

3. 空间曲线上第二型曲线积分与路径无关性:

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 为空间单连通区域. 若函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ 和 $R(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 且有一阶连续的偏导数, 则以下四个条件等价:

(i) 对于 Ω 内任一按段光滑的封闭曲线 L , 有 $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

(ii) 对于 Ω 内任一按段光滑的封闭曲线 L , 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关;

(iii) $Pdx + Qdy + Rdz$ 是 Ω 内某一函数 u 的全微分;

(iv) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ 在 Ω 内处处成立.



例题分析

例 12.1 计算曲面积分 $\iint_S (y^2 + z^2) dS$, S : 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

解 方法一

记 $S_1 = z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $S_2 = z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$.

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + z^2) dS &= \iint_{S_1} (y^2 + z^2) dS + \iint_{S_2} (y^2 + z^2) dS \\ &= 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \frac{a(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy, \end{aligned}$$

极坐标变换

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy &= \iint_{[0,a] \times [0,2\pi]} \frac{a^2-r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta \\
&= \int_0^a dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\sqrt{a^2-r^2}} (2a^2-r^2-r^2 \cos 2\theta) d\theta \\
&= \int_0^a \frac{\pi(2a^2-r^2)}{\sqrt{a^2-r^2}} \cdot r dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{a^2} \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-t}} + \sqrt{a^2-t} \right) dt \quad (\text{令 } t=r^2) \\
&= \frac{4}{3} \pi a^3,
\end{aligned}$$

故原式 = $\frac{8}{3} \pi a^4$.

方法二

参数方程: $x = a \sin \varphi \cos \theta, y = a \sin \varphi \sin \theta, z = a \cos \varphi, (\varphi, \theta) = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

$E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = a^2, F = x_\varphi x_\theta + y_\varphi y_\theta + z_\varphi z_\theta = 0,$

$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = a^2 \sin^2 \varphi.$

$$\begin{aligned}
\iint_S (y^2 + z^2) ds &= \iint_D (a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^4 (\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a^4 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \\
&= 2a^4 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \theta + \frac{1}{3} \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{8}{3} \pi a^4.
\end{aligned}$$

方法三

令 $f(x, y, z) = x^2, g(x, y, z) = y^2, (x, y, z) \in S$. 因 S 关于平面 $y = x$ 对称, 且在对称点 (x, y, z) 与 $(y, x, z) \in S$ 处有 $f(x, y, z) = g(y, x, z)$, 故

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S g(x, y, z) dS, \quad \text{即} \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS,$$

类似地, $\iint_S x^2 dS = \iint_S z^2 dS.$

因此, $\iint_S (y^2 + z^2) dS = \frac{2}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{2}{3} a^2 \iint_S dS = \frac{2}{3} a^2 \cdot 4\pi a^2 = \frac{8}{3} \pi a^4.$

评注 利用奇偶对称性, 轮换对称性, 或曲面方程及曲面积分的几何意义均可简化计算.

例 12.2 计算积分 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z) dS$,

$$\text{式中, } f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0, & \text{若 } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

解 方法一

$$\text{由球面方程 } x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \text{ 知 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

$$\text{而由 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}, \text{ 可得 } x^2 + y^2 = \frac{t^2}{2} = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是, 积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} (x^2 + y^2) \cdot \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = |t| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi.$$

$$\text{因为, } \int \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - r^2 - t^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} d(t^2 - r^2) = \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} + C,$$

$$\text{所以, } \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = \left[\frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} \right] \Big|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} |t|^3,$$

$$\text{则 } F(t) = |t| \int_0^{2\pi} \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} |t|^3 d\varphi = \frac{(8 - 5\sqrt{2})}{6} \pi t^4.$$

方法二

$$\text{记 } \Omega_t = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = t^2\} \cap \{(x, y, z) \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$\Omega'_t = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = t^2\} \cap \{(x, y, z) \mid z < \sqrt{x^2 + y^2}\},$$

$$Q_t \text{ 在 } xy \text{ 坐标平面上投影为: } D_t: x^2 + y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

$$\text{由 } x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \text{ 得 } \Omega_t: z = \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D_t.$$

$$\text{参数方程为: } x = t \sin \varphi \cos \theta, y = t \sin \varphi \sin \theta, z = t \cos \varphi, (\varphi, \theta) \in D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F(t) &= \iint_{\Omega_t} f(x, y, z) dS + \iint_{\Omega'_t} f(x, y, z) dS = \iint_{\Omega_t} (x^2 + y^2) dS \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^4 \sin^3 \theta d\theta = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{6} \pi t^4. \end{aligned}$$

例 12.3 设 Σ 为椭球面 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in \Sigma$, Π 为在点 P 处的切平面, $d(x, y, z)$ 为点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 Π 的距离, 求 $\iint_{\Sigma} \frac{z}{d(x, y, z)} dS$.

解 椭球面在点 $P(x, y, z)$ 的切平面方程为:

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0,$$

利用 $P(x, y, z) \in \Sigma$ 化简平面方程: $xX + yY + 2zZ - 2 = 0$,

$$O(0, 0, 0) \text{ 到平面 } \Pi \text{ 的距离为: } d(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

椭球面方程两边求微分, $x dx + y dy + 2z dz = 0$,

$$dz = -\frac{x}{2z} dx - \frac{y}{2z} dy, \text{ 所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{2z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z},$$

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2z}\right)^2 + \left(\frac{y}{2z}\right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2z} dx dy \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \iint_{\Sigma} \frac{z}{d(x, y, z)} dS &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} \frac{z \cdot \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2z} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2} (4 - x^2 - y^2) dx dy = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

例 12.4 计算 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, 式中 S 为球壳 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 的外表面.

解 由对称性, 只需计算 $\iint_S z^2 dx dy$.

$z - c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$, 由极坐标得

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dx dy &= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dx dy \\ &\quad - \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} [c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dx dy \\ &= 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy \\ &= 4c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \end{aligned}$$

$$= 8\pi c \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^R = \frac{8}{3}\pi R^3 c,$$

$$\text{则} \iint_S x^2 dydz + y^2 dx dz + z^2 dx dy = \frac{8}{3}\pi R^3 (a+b+c).$$

评注 注意利用奇偶对称性及轮换对称性.

例 12.5 计算 $\oiint_S xy dydz$, 其中 S 为由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 所围成立体的表面的外侧.

解 记 $S_1: z = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$, 并取下侧; $S_2: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$, 并取上侧; 记 S_1 的前半部分为 S_{11} , 并取前侧; S_1 的后半部分为 S_{12} , 并取后侧, 记 S_1 在 yOz 坐标面上的投影为 D , 则

$$D = \{(y, z) \mid 0 \leq z \leq 1, -\sqrt{z} \leq y \leq \sqrt{z}\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } \iint_{S_1} xy dydz &= \iint_{S_{11}} xy dydz + \iint_{S_{12}} xy dydz \\ &= \iint_D y \sqrt{z - y^2} dydz - \iint_D (-y \sqrt{z - y^2}) dydz \\ &= 2 \iint_D y \sqrt{z - y^2} dydz = 2 \int_0^1 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} y \sqrt{z - y^2} dy = 2 \int_0^1 0 dz = 0. \end{aligned}$$

因为 S_2 的法线方向恒平行于 z 轴, 使 $dy = 0$, 所以 $\iint_{S_2} xy dydz = 0$,

综上所述, 有:

$$\iint_S xy dydz = \iint_{S_1} xy dydz + \iint_{S_2} xy dydz = 0 + 0 = 0.$$

例 12.6 计算 $\iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz$.

解 由于 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

$$\text{故得} \iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

例 12.7 计算 $\iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dx dz + (z - x + y) dx dy$, 式中 S 为曲面 $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 的外表面.

$$\text{解} \quad \iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dx dz + (z - x + y) dx dy = \iiint_V 3 dx dy dz,$$

其中, V 为由曲面 $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 围成的体积, 变换

$u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y$, 则 $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 4$.

由 $|u| + |v| + |w| = 1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积, 其大小等于由平面 $u + v + w = 1, u = 1, v = 0, w = 0$ 所围成的四面体体积的 8 倍, 即为 $8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{4}{3}$. 于是, 所求积分为

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x - y + z) dydz + (y - z + x) dx dz + (z - x + y) dx dy \\ &= \iiint_{|u|+|v|+|w| \leq 1} 3 \cdot \frac{1}{4} du dv dw = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1. \end{aligned}$$

例 12.8 计算 $I = \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dydz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$, 其中, $f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四象限部分的上侧.

解 Σ 的单位法量 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \{[f(x, y, z) + x] \cos \alpha + [2f(x, y, z) + y] \cos \beta + [f(x, y, z) + z] \cos \gamma\} dS \\ &= \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) \cos \alpha + 2f(x, y, z) \cos \beta + f(x, y, z) \cos \gamma] dS \\ &\quad + \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \frac{dx dy}{\cos \gamma} \\ &= \iint_{D_{xy}} (x - y + 1 - x + y) dx dy \quad (D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 0\}) \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

评注 本题设给出函数 $f(x, y, z)$ 的具体表达式, 不可能直接进行计算. 由于 Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四象限部分的上侧, 故 Σ 的单位法量 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 由此看出, $f(x, y, z) \cos \alpha + 2f(x, y, z) \cos \beta + f(x, y, z) \cos \gamma = 0$, 考虑利用两类曲面积分的关系, 化为对第一型曲面积分进行计算.

例 12.9 应用高斯公式计算三重积分 $\iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz$, 其中 V 是由 $x \geq 0$, $y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ 与 $x^2 + y^2 \leq 1$ 所确定的空间区域.

解 记 $D_1: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$; $D_2: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x = 0$; $D_3: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1, y = 0$. 由高斯公式得

$$\iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz = \oint_S xyz dx dy + xyz dy dz + xyz dz dx,$$

其中, S 为 V 的边界曲面, 并取外侧, 因为

$$\oint_S xyz dx dy = \iint_{D_1} xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta \cos\theta dr = \frac{1}{8},$$

$$\oint_S xyz dy dz = \iint_{D_2} yz \sqrt{1-y^2} dy dz = \int_0^1 dy \int_0^1 yz \sqrt{1-y^2} dz = \frac{1}{6},$$

$$\oint_S xyz dz dx = \iint_{D_3} xz \sqrt{1-x^2} dz dx = \int_0^1 dx \int_0^1 xz \sqrt{1-x^2} dz = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } \iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{24}.$$

例 12.10 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (z + 2y) dz dx + z dx dy$, 其中, Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2$

($0 \leq z \leq 1$), 其法向量与 z 正向夹角为锐角.

解 方法一

高斯公式计算:

$$\text{记 } \Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad (\text{下侧})$$

设 Σ 与 Σ_1 所围区域为 Ω , 利用高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (z + 2y) dz dx + z dx dy \\ &= \left(\iint_{\Sigma} + \iint_{\Sigma_1} \right) - \iint_{\Sigma_1} = \oint_{\Sigma + \Sigma_1} (z + 2y) dz dx + z dx dy - \iint_{\Sigma_1} (z + 2y) dz dx + z dx dy \\ &= - \iint_{\Omega} 3 dx dy dz - \iint_{\Sigma_1} dx dy \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = -\frac{3}{2}\pi + \pi = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

方法二

化为一项计算:

曲面所给法线方向为 $\mathbf{n} = (-2x, -2y, 1)$, 所以方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (z+2y)dzdx + zdx dy \\ &= \iint_{\Sigma} [(z+2y)\cos\beta + z\cos\gamma]ds \\ &= \iint_{\Sigma} \left[(z+2y) \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + z \right] \cos\gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} [(z+2y)(-2y) + z] dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [(x^2+y^2)(-2y) - 4y^2 + x^2 + y^2] dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [-4y^2 + x^2 + y^2] dx dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [x^2 + y^2] dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

评注 对第二型曲面积分常常把三项化为一项计算. 公式为

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy &= \iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(P \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R \right) \cos\gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left(P \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R \right) dx dy. \end{aligned}$$

例 12.11 计算积分 $\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, 此积分是从点

$A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 沿着螺线 $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \frac{h}{2\pi}\varphi$ 上所取的.

解 连结 A, B 两点得线段 AB , 它与 AmB 组成封闭曲线并依正向进行, 则由斯托克斯公式知:

$$\oint_{AmBA} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \iint_S 0 dy dz + 0 dx dz + 0 dx dy = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是, } & \int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz \\
 &= \int_{AB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz \\
 &= \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3}.
 \end{aligned}$$

例 12.12 讨论曲线积分

$$\begin{aligned}
 J = \int_L & \left(z - y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^x \right) dx + \left(-x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \right) dy \\
 & + \left(x + y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dz
 \end{aligned}$$

与路线的无关性,并计算当 L 为从点 $(1,0,0)$ 到点 $(0,1,0)$ 的有向曲线时,相应曲线积分的值.

解 因为 $P(x, y, z) = z - y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^x$;

$$Q(x, y, z) = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z;$$

$$R(x, y, z) = x + y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 - \frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1 - \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 1 - \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

且 P, Q, R 在单连通区域 $\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ 上具有一阶连续偏导数,所以 J 在 $\mathbf{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ 上与路线无关.

方法一

取 L_1 为从点 $(1,0,0)$ 到点 $(1,1,0)$ 再到点 $(0,1,0)$ 的有向折线段,则由积分与路线的无关性有

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{L_1} \left(z - y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^x \right) dx + \left(-x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \right) dy \\
 &+ \left(x + y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(-1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right) dy + \int_1^0 \left(-1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + e^x \right) dx = 1 - e.
 \end{aligned}$$

方法二

由于

$$\begin{aligned}
 & \left(z - y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + e^x \right) dx + \left(-x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \right) dy \\
 & + \left(x + y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dz \\
 & = (zdx + xdz) - (ydx + xdy) + (zdy + ydz) + e^x dx \\
 & + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz \right) \\
 & = d(zx - xy + yz + e^x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),
 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } J = (zx - xy + yz + e^x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \Big|_{(1,0,0)}^{(0,1,0)} = 1 - e.$$

评注 如要证 $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ 为某个三元函数 $u(x, y, z)$ 的

全微分, 只需证 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.



练习题

1. 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 求 $\iint_{\Sigma} xy dy dz + x dz dx + x^2 dx dy$.

2. 设曲面 S 为曲线 $\begin{cases} z = e^y \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq y \leq 2)$ 绕 z 轴旋转一周所形成曲面的下侧, 计算曲面积分 $\iint_S 4xz dy dz - 2z dx dz + (1 - z^2) dx dy$.

3. 计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} \frac{xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

4. 计算曲面积分 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, 其中 S 为

(1) $S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(2) $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

5. 计算 $\iint_S z dS$, 其中 S 为锥体 $z \geq \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} (a > 0, h > 0) (0 \leq z \leq h)$ 包含在柱体 $x^2 + y^2 \leq ax$ 中部分的表面.

6. 设 T 为不自交的光滑闭曲线, 求 $\oint_T \text{grad}[\sin(x+y+z)]dr$, 其中 $dr = idx + jdy + kdz$.

7. 求 $I = \oint_L (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax (b > a > 0)$ 的交线 ($z \geq 0$), L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正向往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边.

8. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0, a \geq 0\}$, S 为 Ω 的边界曲面外侧, 计算 $\oiint_S \frac{ax dydz + 2(x+a)y dzdx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}$.

9. 设曲面 S 为曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{1+z^2} \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq z \leq 2)$ 绕 z 轴旋转一周而形成的曲面, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角, 计算曲面积分 $\iint_S xz^2 dydz + (\sin x + x^2 + y^2) dx dy$.

10. 设 S 是以 L 为边界的光滑曲面, 试求可微函数 $\varphi(x)$, 使曲面积分 $\iint_S (1-x^2)\varphi(x) dydz + 4xy\varphi(x) dzdx + 4xz dx dy$ 与 S 的形状无关.

11. 证明 $\iint_{\Sigma} (1-x^2-y^2) ds \leq \frac{2\pi}{15}(8\sqrt{2}-1)$, 其中 Σ 为 $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z = \frac{t}{2} (t > 0)$ 之间的部分.

12. 设曲面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上的点 (x, y, z) 处的切平面为 π , 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{\lambda} dS$, 其中 λ 是 $(0,0)$ 到 π 的距离.

13. 计算 $\iint_S \frac{2dydz}{x \cos^2 x} + \frac{dzdx}{\cos^2 y} - \frac{dxdy}{z \cos^2 z}$, 其中 S 是 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 外侧为正.

14. 设 Ω_δ 是中心在点 (x_0, y_0, z_0) , 半径为 δ 的球体, $\partial\Omega_\delta$ 是 Ω_δ 的正向边界面, V_δ 是 Ω_δ 的体积, 函数 $X_{(x,y,z)}, Y_{(x,y,z)}, Z_{(x,y,z)}$ 均具有一阶连续偏导数. 求证:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\oiint_{\partial\Omega_\delta} X dydz + Y dzdx + Z dxdy}{V_\delta} = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_{(x_0, y_0, z_0)}.$$

15. 设 $f(x, y, z) \in C'$, $\pi: f(x, y, z) = 0$ 是以原点为顶点的一张锥面, 若 π 与平面 $Ax + By + Cz + D = 0 (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ 围成一个锥体 Ω , 且其底面积是 S , 高是 h , 体积是 V , 试求 V .

第十三讲 场论初步



知识要点

1. 定义 13.1 可由某数量函数 $u(x, y, z)$ 所定义的向量函数 $\text{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ 给出的向量场, 称为有势场, 而 $u(x, y, z)$ 为场的势. 引进符号向量 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 则梯度可写作 $\text{grad} u = \nabla u$.

2. 定义 13.2 设 $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域上的向量函数, 定义 $\text{div} A(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 为 A 在 (x, y, z) 的散度, 称相应的数量场为散度场, 可记作 $\text{div} A = \nabla \cdot A$.

3. 定义 13.3 设 $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域 V 上的向量函数, 对 V 上每一点 (x, y, z) , 定义向量函数 $F(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$, 称它为向量函数 A 在 (x, y, z) 处的旋度, 记作 $F(x, y, z) = \text{rot} A$. 由向量函数 A 的旋度 $\text{rot} A$ 所定义的向量场, 称为旋度场, 可记作 $\text{rot} A = \nabla \times A$.



例题分析

例 13.1 如果向量场 $A(x, y, z) = \left(\frac{ax+y}{x^2+y^2} + e^x, -\frac{x-y+b}{x^2+y^2} + y, \frac{z+1}{z^2} \right)$ 是有势场, 求常数 a, b 的值及 A 的势函数 u .

解 因为 $\text{rot} A = \nabla \times A = \left(0, 0, \frac{2x(b+(a-1)y)}{(x^2+y^2)^2} \right)$, 所以由 $\text{rot} A = 0$, 得到 $a = 1, b = 0$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } & \left(\frac{ax+y}{x^2+y^2} + e^x \right) dx + \left(-\frac{x-y+b}{x^2+y^2} + y \right) dy + \frac{z+1}{z^2} dz \\ &= \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} + e^x \right) dx + \left(-\frac{x-y}{x^2+y^2} + y \right) dy + \frac{z+1}{z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+y^2} dx + \frac{2y}{x^2+y^2} dy \right) + \left(\frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^x dx + y dy + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) dz \\
 & = d \left(\ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} + e^x + \frac{1}{2} y^2 + \ln |z| - \frac{1}{z} \right),
 \end{aligned}$$

因此, $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} + e^x + \frac{1}{2} y^2 + \ln |z| - \frac{1}{z} + C$.

评注 有势场是旋度恒为零的向量场, 由 $\operatorname{rot} A = 0$ 即可求得有关量.

例 13.2 求向量场 $A(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ 的散度及旋度.

解 根据定义, 我们有

$$\operatorname{div} A = \nabla \cdot A = 0 + 0 + 0 = 0, \operatorname{rot} A = \nabla \times A = (0, 0, 0).$$



练习题

1. 设 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 求 $\operatorname{grad} f(x, y, z), \operatorname{div}[\operatorname{grad} f(x, y, z)], \operatorname{rot}[\operatorname{grad} f(x, y, z)]$.

2. 设 $F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \{(x, y, z)\}$, 求 $\operatorname{div} F(x, y, z), \operatorname{rot} F(x, y, z)$.

第十四讲 历届试题

浙江省首届高等数学(微积分)竞赛试题

(2002.12.7)

一、计算题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}$.

2. 求积分

$$\iint_D |xy - 1| dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \right\}.$$

3. 设 $y = x^2 e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^{hx}$ 的一个解,求常数 a, b, c, h .4. 设 $f(x)$ 连续,且当 $x > -1$ 时, $f(x) \left[\int_0^x f(t) dt + 1 \right] = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$,求 $f(x)$.5. 设 $S_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{2k^2}$,求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.6. 求积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.二、(满分 15 分) 求平面 $x + 2y - 2z = 1$ 含在圆柱体 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的面积.三、(满分 20 分) 证明: $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx > 0$.四、(满分 20 分) 设二元函数 $f(x, y)$ 有一阶连续的偏导数,且 $f(0, 1) = f(1, 0)$.

证明:单位圆周上至少存在两点满足方程

$$y \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - x \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

五、(满分 15 分)(非数学类做) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为满足 $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}, n \geq 1$ 的两个实数列,已知 $a_n > 0 (n \geq 1)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 也收敛.六、(满分 15 分)(数学类做) 设 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, n \geq 1$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

的收敛半径、收敛域及和函数.

2003 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$.

2. 设 $G(x) = \int_1^x t \sin t^3 dt$, 求 $\int_0^1 G(x) dx$.

3. 求 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot k^2$.

二、(满分 20 分) 求满足下列性质的曲线 C : 设 $P_0(x_0, y_0)$ 为曲线 $y = 2x^2$ 上任一点, 则由曲线 $x = x_0, y = 2x^2, y = x^2$ 所围成区域的面积 A 与曲线 $y = y_0, y = 2x^2$ 和 C 所围成区域的面积 B 相等.

三、(满分 20 分) 证明: 锐角三角形内一点到三顶点连线成等角时, 该点到三顶点距离之和为最小.

四、(满分 20 分) 证明: $\left| \int_{2003}^{2004} \sin t^2 dt \right| < \frac{1}{2003}$.

五、(满分 15 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. 证明: 对任意正整数 a, b , 必存在 $(0, 1)$ 内的两个数 ξ 与 η , 使

$$\frac{a}{\varphi'(\xi)} + \frac{b}{\varphi'(\eta)} = a + b.$$

六、(满分 15 分) 求使得下列不等式对所有的自然数 n 都成立的最小的数 β :

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

(工科类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$.

2. 设 $G(x) = \int_1^x t \sin t^3 dt$, 求 $\int_1^2 G(x) dx$.

3. 求 $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$.

二、(满分 20 分) 求满足下列性质的曲线 C : 设 $P_0(x_0, y_0)$ 为曲线 $y = 2x^2$ 上任一点, 则由曲线 $x = x_0, y = 2x^2, y = x^2$ 所围成区域的面积 A 与曲线 $y = y_0, y = 2x^2$ 和 C 所围成区域的面积 B 相等.

三、(满分 20 分) 求 $\int_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$, 其中 $L: \frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$ 的上半平面内部分, 从点 $(-2, 0)$ 到 $(4, 0)$.

四、(满分 15 分) 证明: $\left| \int_{2003}^{2004} \sin t^2 dt \right| < \frac{1}{2003}$.

五、(满分 15 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. 证明: 存在 $(0, 1)$ 内的两个数 ξ, η , 使 $\frac{1}{\varphi'(\xi)} + \frac{2}{\varphi'(\eta)} = 3$.

六、(满分 15 分) 从正方形四个顶点 $P_1(0, 1), P_2(1, 1), P_3(1, 0), P_4(0, 0)$ 开始构造 $P_5, P_6, \dots$, 使得 P_5 为 P_1P_2 的中点, P_6 为 P_2P_3 的中点, P_7 为 P_3P_4 的中点, $\dots$, 这样, 我们得到点列 $\{P_n\}$ 收敛于正方形内部一点 P_0 , 试求 P_0 的坐标.

(经管类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 已知 $xe^y + y + \sin x = 0$, 求 $y'(0)$.

2. 设 $G(x) = \int_1^x t \sin t^3 dt$, 求 $\int_1^2 G(x) dx$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$.

4. 求 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 为以 $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域.

二、(满分 20 分) 设 $a > 0$, 试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ 的敛散性, 当级数收敛时, 试求其和.

三、(满分 20 分) 设 $f(x)$ 一阶连续可导, $f(x) + f'(x) \neq 0$, 证明: $f(x)$ 至多有一个

零点.

四、(满分 20 分) 求满足下列性质的曲线 C : 设 $P_0(x_0, y_0)$ 为曲线 $y = 2x^2$ 上任一点, 则由曲线 $x = x_0, y = 2x^2, y = x^2$ 所围成区域的面积 A 与曲线 $y = y_0, y = 2x^2$ 和 C 所围成区域的面积 B 相等.

五、(满分 15 分) 证明: $\left| \int_{2003}^{2004} \sin t^2 dt \right| < \frac{1}{2003}$.

六、(满分 15 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. 证明: 存在 $(0, 1)$ 内的两个数 ξ, η , 使 $\frac{1}{\varphi'(\xi)} + \frac{2}{\varphi'(\eta)} = 3$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 求 $\int_1^e x \ln x dx$.

2. 已知 $xe^y + y + \sin x = 0$, 求 $y'(0)$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$.

4. 求 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 为以 $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ 为顶点的三角形区域.

二、(满分 20 分) 设 $a > 0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$ 的敛散性, 当级数收敛时, 试求其和.

三、(满分 20 分) 设 $f(x)$ 一阶连续可导, $f(x) + f'(x) \neq 0$, 证明: $f(x)$ 至多有一个零点.

四、(满分 20 分) 求满足下列性质的曲线 C : 设 $P_0(x_0, y_0)$ 为曲线 $y = 2x^2$ 上任一点, 则由曲线 $x = x_0, y = 2x^2, y = x^2$ 所围成区域的面积 A 与曲线 $y = y_0, y = 2x^2$ 和 C 所围成区域的面积 B 相等.

五、(满分 15 分) 证明: $\frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{1}{ne}, x > 0$.

六、(满分 15 分) 证明: $\left| \int_{2003}^{2004} \sin t^2 dt \right| < \frac{1}{2003}$.

2004 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}}$, 其中 a 为常数.

2. 计算: $\int_0^x \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} dx$.

3. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 15y$ 在 $\Omega = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大、最小值.

4. 计算: $\iint_D \max(xy, x^3) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

二、(满分 20 分) 设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

三、(满分 20 分) 设椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在 $A(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ 点的切线交 y 轴于 B 点, 设 l 为从 A 到 B 的直线段, 试计算:

$$\int_l \left(\frac{\sin y}{x+1} - \sqrt{3}y \right) dx + [\cos y \ln(x+1) + 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}] dy.$$

四、(满分 20 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = -1, f(1) = 0, f'(0) = 0$, 试证至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!} f'''(\xi), x \in (0, 1)$.

五、(满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2 + x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{2t} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2 + x^2} dx, (t > 0).$$

六、(满分 15 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^\alpha}}$ 的敛散性, 其中 $\alpha > 0$ 为常数.

(工科类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 计算: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)}.$

2. 计算: $\int_0^{\pi} \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} dx$.

3. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 15y$ 在 $\Omega = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大、最小值.

4. 计算: $\iint_D \max(xy, x^3) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

二、(满分 20 分) 设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

三、(满分 20 分) 设椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在 $A(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ 点的切线交 y 轴于 B 点, 设 l 为从 A 到 B 的直线段, 试计算:

$$\int_l \left(\frac{\sin y}{x+1} - \sqrt{3}y \right) dx + [\cos y \ln(x+1) + 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}] dy.$$

四、(满分 20 分) 设函数 f 连续, $a < b$, 且 $\int_a^b |f(x)| dx = 0$, 试证明: $f(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

五、(满分 15 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}$ 的敛散性.

六、(满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2 + x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{2t} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2 + x^2} dx$, $t > 0$.

(经管类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax - b) = 0$, 求常数 a 和 b 的值.

2. 计算: $\int \frac{\cos x}{\sin x (\sin x + \cos x)} dx$.

3. 计算: $\int_0^1 x^2 |x - k| dx$, 其中 k 为常数.

4. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$ 的和.

二、(满分 20 分) 设 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

三、(满分 20 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 - 3xy^2 + 2y^3 - 32 = 0$ 确定, 且 $f(x)$ 可

导,试求 $f(x)$ 的极值.

四、(满分 20 分) 证明:当 $x > 0$ 时, $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

五、(满分 15 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^3}}$ 的敛散性.

六、(满分 15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导,且 $f(0)=-1, f(1)=0, f'(0)=0$, 试证至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!} f'''(\xi), x \in (0,1)$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 15 分,满分 60 分)

1. 计算: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)}$.

2. 计算: $\int \frac{\cos x}{\sin x (\sin x + \cos x)} dx$.

3. 计算: $\int_{-1}^1 \frac{\cos[\arccos x] \cdot \cos[\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} dx$, 其中 n, m 为非负整数.

4. 求曲线 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

二、(满分 20 分) 设函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且恒正, 若 $f(x) = \int_{-1}^1 |t-x| g(t) dt$, 试讨论曲线 $y = f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的凹凸.

三、(满分 20 分) 求 $y = x(2-x)$ 与 $2x+y=3$ 所围成的平面图形面积及此平面图形绕直线 $x=1$ 旋转所得的旋转体体积.

四、(满分 20 分) 证明:当 $x > 0$ 时, $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

五、(满分 15 分) 对 k 的不同取值情况, 讨论方程 $x^3 - 3kx^2 + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上的根的个数.

六、(满分 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续, 在 $(1,3)$ 内二阶导数连续, 试证至少存在一点 $\xi \in (1,3)$, 使 $f''(\xi) = f(1) - 2f(2) + f(3)$.

2005 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \ln(1+t) dt - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}}{(x - \sin x)(e^{x^2} - 1)}$.

2. 计算 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx$.

3. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{2005} x}$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$, 求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值.

5. 设 $z = f(x-y, x+y) + g(x+ky)$, f, g 具有二阶连续偏导数, 且 $g'' \neq 0$, 如果 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv 4f''$, 求常数 k 的值.

二、(满分 20 分) 在某平地上向下挖一个半径为 R 的半球形池塘, 若某点泥土的密度为 $\rho = e^{r^2/R^2}$, 其中 r 为此点离球心的距离, 试求挖此池塘需做的功.

三、(满分 20 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \cdot \frac{1}{n}$ 的收敛性.

四、(满分 20 分) 证明对任意连续函数 $f(x)$, 有

$$\max \left\{ \int_{-1}^1 |x - \sin^2 x - f(x)| dx, \int_{-1}^1 |\cos^2 x - f(x)| dx \right\} \geq 1.$$

五、(满分 15 分) 对下列函数 $f(x)$, 分别说明是否存在一个区间 $[a, b]$, $a > 0$, 使 $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \{x \mid x \in [a, b]\}$, 并说明理由.

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$; (2) $f(x) = \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

六、(满分 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶导数连续, 证明: $\int_{-1}^1 xf(x) dx = \frac{2}{3}f'(\xi) +$

$$\frac{1}{3}\xi f''(\xi).$$

(工科类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \ln(1+t) dt - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}}{(x - \sin x)(e^{x^2} - 1)}$.

2. 计算 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx$.

3. 计算 $\int_0^x \min(4, t^4) dt$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$, 求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值.

5. 设 $z = f(x-y, x+y) + g(x+ky)$, f, g 具有二阶连续偏导数, 且 $g'' \neq 0$, 如果 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f''_{22}$, 求常数 k 的值.

二、(满分 20 分) 计算 $\oint_l \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, 其中 l 为 $|x| + |y| = 1$ 沿正向一周.

三、(满分 20 分) 在某平地上向下挖一个半径为 R 的半球形池塘, 若某点泥土的密度为 $\rho = e^{r^2/R^2}$, 其中 r 为此点离球心的距离, 试求挖池塘需做的功.

四、(满分 20 分) 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

(1) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$;

(2) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$.

五、(满分 15 分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \cdot \frac{1}{n}$ 的收敛性.

六、(满分 15 分) 对下列函数 $f(x)$, 分别说明是否存在一个区间 $[a, b]$, $a > 0$, 使 $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \{x \mid x \in [a, b]\}$, 并说明理由.

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$; (2) $f(x) = \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

(经管类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5}}{3} \right)^n$.

2. 计算 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx$.

3. 计算 $\int_0^x \min(4, t^4) dt$.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x^2} - x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - 1$ 与 Ax^B 为等价无穷小,求常数 A, B 的值.

5. 求函数 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-3| + |x-5|$ 的最小值.

二、(满分 20 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 1$,求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值.

三、(满分 20 分) 证明:当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

(1) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$;

(2) $\tan x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$.

四、(满分 20 分) 设 $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{1 + \sin^2 x} dx, B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2 + \cos^2 x} dx,$

$C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10(1 + \sin^2 x)}{4x^2 + \pi^2} dx$,试比较 A, B, C 的大小.

五、(满分 15 分) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, (1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的值; (2) 证明

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛 ($\lambda > 0$).

六、(满分 15 分) 对下列函数 $f(x)$, 分别说明是否存在一个区间 $[a, b], a > 0$, 使 $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \{x \mid x \in [a, b]\}$, 并说明理由.

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$; (2) $f(x) = \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 计算 $\int_{-1}^1 |1-2x| dx$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ ax+b, & x \leq 0 \end{cases}$ 可导,求常数 a, b 的值.

3. 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n$.

4. 计算 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx$.

5. 求函数 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-3|$ 的最小值.

二、(满分 20 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 1$, 求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值.

三、(满分 20 分) 证明:当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$.

四、(满分 20 分) 设 $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x} dx, B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2 + \cos^2 x} dx,$

$C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10(1+\sin^2 x)}{4x^2 + \pi^2} dx$, 试比较 A, B, C 的大小.

五、(满分 15 分) 设 $a_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} + \cdots + \frac{1}{k^2+2k}, k = 1, 2, \cdots$.

(1) 求 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$; (2) 证明数列 $\{a_k\}$ 单调减少.

六、(满分 15 分) 对下列函数 $f(x)$, 分别说明是否存在一个区间 $[a, b], (a > 0)$, 使 $\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \{x \mid x \in [a, b]\}$, 并说明理由.

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$; (2) $f(x) = \frac{1}{x}$; (3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

2006 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 15 分,满分 60 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2}{(2n)^3} - \frac{1}{6} \right]$.

2. 求 $\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)} dx$.

3. 求 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left[\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right] dx$.

4. 求过 $(1, 2, 3)$ 且与曲面 $z = x + (y - z)^3$ 的所有切平面皆垂直的平面方程.

二、(满分 15 分) 设 $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$, 问 $f(x) = 0$ 有几个实根? 并说明理由.

三、(满分 20 分) 求级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)^3$ 中 x^{20} 的系数.

四、(满分 20 分) 计算 $\int_C xy ds$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

五、(满分 20 分)

(1) 证明: 若 $\mathbf{R}$ 上的连续函数满足 $\sup_{t \leq x} f(t) = x$, 则 $f(x) = x$;

(2) 试给出一个满足 $\sup_{t \leq x} f(t) = x$ 且在 $\mathbf{R}$ 上点点不连续的函数 $f(x)$.

六、(满分 15 分) 求最小的实数 c , 使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq c.$$

(工科类)

一、计算题(每小题 15 分,满分 60 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right]$.

2. 求 $\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)} dx$.

3. 求 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left[\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right] dx$.

4. 求过 $(1, 2, 3)$ 且与曲面 $z = x + (y - z)^3$ 的所有切平面皆垂直的平面方程.

二、(满分 15 分) 设 $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$, 问 $f(x) = 0$ 有几个实根? 并说明理由.

三、(满分 20 分) 求级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)^3$ 中 x^{20} 的系数.

四、(满分 20 分) 计算 $\int_C xy ds$, 其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

五、(满分 20 分) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为非负实数, 试证:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x| \text{ 的充分必要条件为 } \sum_{k=1}^n ka_k \leq 1.$$

六、(满分 15 分) 求最小的实数 c , 使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq c$.

(经管类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right]$.

2. 求 $\int \frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)} dx$.

3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax) = b$, 求 a, b 的值.

4. 求由 $y = 0, y = \frac{1}{e} \sqrt{x}, y = \ln \sqrt{x}$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

二、(满分 15 分) 设 $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$, 问 $f(x) = 0$ 有几个实根? 并说明理由.

三、(满分 20 分) 求级数 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)^3$ 中 x^{20} 的系数.

四、(满分 20 分) $f_1(x)$ 连续, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

五、(满分 20 分) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为非负实数, 试证:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x| \text{ 的充分必要条件为 } \sum_{k=1}^n ka_k \leq 1.$$

六、(满分 15 分) 求最小的实数 c , 使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq c.$$

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 15 分, 满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(2-x)e^{\frac{1}{x}} + x]$.

2. 求 $\int \frac{\ln(2+x) - \ln(1+x)}{x^2 + 3x + 2} dx$.

3. 求曲线 $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = \arctan t + e^y = e^2 \end{cases}$ 在 $t = 0$ 处的切线方程.

4. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, 求 $f^{(10)}(x)$.

二、(满分 15 分) 设 $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$, 问 $f(x) = 0$ 有几个实根? 并说明理由.

三、(满分 20 分) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax) = b$, 求 a, b 的值.

四、(满分 20 分) 求由 $y = 0, y = \frac{1}{e} \sqrt{x}, y = \ln \sqrt{x}$ 围成的平面图形 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积.

五、(满分 20 分) 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, 证明:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x tf''(x-t) dt.$$

六、(满分 15 分) 证明: $\forall x, |a \sin x + b \sin 2x| \leq |\sin x|$ 的充分必要条件为 $|a| + |2b| \leq 1$.

2007 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 求 $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

3. 求 p 的值, 使 $\int_a^b (x+p)^{2007} e^{(x+p)^2} dx = 0$.

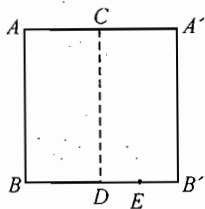
4. 设 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, $f''(x) \geq 0$, 且 $0 \leq f(x) \leq 1 - e^{-x^2}$, 求 $f(x)$ 的表达式.

5. 计算 $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 4 (0 \leq z \leq 1)$.

二、(满分 20 分) 设 $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$,

$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$, 求: (1) $\frac{u_{10}}{v_{10}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

三、(满分 20 分) 有一张边长为 4π 的正方形纸(如图), C, D 分别为 AA', BB' 的中点, E 为 DB' 的中点, 现将纸卷成圆柱形, 使 A 与 A' 重合, B 与 B' 重合, 并将圆柱垂直放在 xOy 平面上, 且 B 与原点 O 重合, D 落在 y 轴正向上, 此时, 求:

(1) 通过 C, E 两点的直线绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程;(2) 此旋转曲面、 xOy 平面和过 A 点垂直于 z 轴的平面所围成的立体体积.

四、(满分 20 分) 求函数 $f(x, y, z) = \frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ 的最大值、最小值.

五、(满分 15 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n+1-k) [nC_n^k]^{-1}$.

六、(满分 15 分) 证明: $\cos \sqrt{2}x \leq -x^2 + \sqrt{1+x^4}$, $x \in (0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4})$.

(工科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

3. 求 p 的值,使 $\int_a^b (x+p)^{2007} e^{(x+p)^2} dx = 0$.

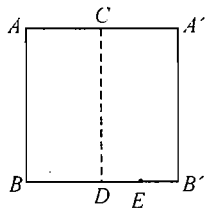
4. 计算 $\int_0^a dx \int_0^b e^{\max\{b^2 x^2, a^2 y^2\}} dy (a > 0, b > 0)$.

5. 计算 $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 4 (0 \leq z \leq 1)$.

二、(满分 20 分) 设 $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$,

$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$, 求: (1) $\frac{u_{10}}{v_{10}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

三、(满分 20 分) 有一张边长为 4π 的正方形纸(如图), C, D 分别为 AA', BB' 的中点, E 为 DB' 的中点, 现将纸卷成圆柱形, 使 A 与 A' 重合, B 与 B' 重合, 并将圆柱垂直放在 xOy 平面上, 且 B 与原点 O 重合, D 落在 y 轴正向上, 此时, 求:



(1) 通过 C, E 两点的直线绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程;

(2) 此旋转曲面、 xOy 平面和过 A 点垂直于 z 轴的平面所围成的立体体积.

四、(满分 20 分) 求函数 $f(x, y, z) = \frac{x^2 + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ 的最大值、最小值.

五、(满分 15 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $a_0 = 2, na_n = a_{n-1} + n - 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 求此幂级数的和函数 $S(x)$.

六、(满分 15 分) 已知 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(x) > 0, f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 \geq 0, x \in \mathbf{R}$,

(1) 证明 $f(x_1)f(x_2) \geq f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

(2) 若 $f(0) = 1$, 证明 $f(x) \geq e^{f'(0)x}, x \in \mathbf{R}$.

(经管类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{\ln(1+x)}$.

3. 求 p 的值,使 $\int_a^b (x+p)^{2007} e^{(x+p)^2} dx = 0$.

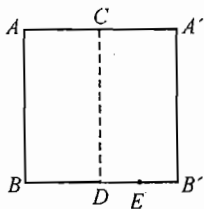
4. 设 $\begin{cases} x = \cos(t^2) \\ y = \int_0^{t^2} e^{-u^2} \sin u du \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}, \alpha \neq 0$.

二、(满分 20 分) 设 $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$,

$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$, 求: (1) $\frac{u_{10}}{v_{10}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

三、(满分 20 分) 有一张边长为 4π 的正方形纸(如图), C, D 分别为 AA', BB' 的中点, E 为 DB' 的中点, 现将纸卷成圆柱形, 使 A 与 A' 重合, B 与 B' 重合, 并将圆柱垂直放在 xOy 平面上, 且 B 与原点 O 重合, D 落在 y 轴正向上, 此时, 求:



(1) 通过 C, E 两点的直线绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程;

(2) 此旋转曲面、 xOy 平面和经过 A 点垂直于 z 轴的平面所围成的立体体积.

四、(满分 20 分) 设函数 $f(x)$ 满足方程 $e^x f(x) + 2e^{\pi-x} f(\pi-x) = 3 \sin x, x \in \mathbf{R}$, 求 $f(x)$ 的极值.

五、(满分 15 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $a_0 = 2, na_n = a_{n-1} + n - 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 求此幂级数的和函数 $S(x)$.

六、(满分 15 分) 证明当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} < \frac{\ln(1+\sin x)}{\pi-x}$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\int \frac{x^9}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

3. 求 p 的值,使 $\int_a^b (x+p)^{2007} e^{(x+p)^2} dx = 0$.

4. 设 $\begin{cases} x = \cos(t^2) \\ y = \int_0^{t^2} e^{-u^2} \sin u du \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

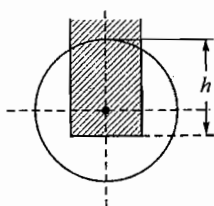
5. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - \sqrt[3]{1-x^3} - ax - b) = 0$, 求 a, b 的值.

二、(满分 20 分) 设函数 $f(x)$ 满足方程 $e^x f(x) + 2e^{\pi-x} f(\pi-x) = 3 \sin x, x \in \mathbf{R}$, 求 $f(x)$ 的极值.

三、(满分 20 分) 设 $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 3}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

四、(满分 20 分) 证明当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} < \frac{\ln(1+\sin x)}{\pi-x}$.

五、(满分 15 分) 有一半径为 1 的圆形照相机镜头,为了拍照的特殊需要,用一宽度为 1 的长方形纸片挡去镜头的一半进光(面积),设纸片从镜头的上方正中间垂直往下挡(如图),求纸片挡下的高度 h .



六、(满分 15 分) 已知 $y = f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上二阶可导函数,且 $f(0) = \frac{1}{2}, f(1) = 1, f'(1) > 1$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$.

2008 年浙江省大学生高等数学 (微积分) 竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. 计算 $\int \frac{dx}{\cos(3+x) \cdot \sin(5+x)}$.

3. 设 $f(x) = x^3 \arcsin x$, 求 $f^{(2008)}(0)$.

4. 求函数 $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2 - 2\sqrt{2}xy - y^2$ 的极值.

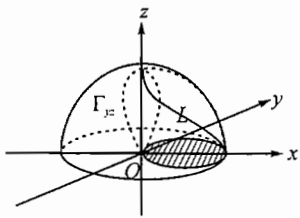
5. 假设立体 I 由 $1-z = x^2 + y^2$ 与 $z=0$ 围成, 密度为 ρ ; 立体 II 由 $1+z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z=0$ 围成, 密度为 1. 已知立体 I 和立体 II 组成的立体其重心位于原点 $(0, 0, 0)$, 求 ρ 的值.

二、(20 分) 分析级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$ 的收敛性.

三、(20 分) 已知 $\int_0^2 \sin(x^2) dx = a$, 求 $\iint_D \sin(x-y)^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

四、(20 分) 设曲线 $L: \begin{cases} z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases} (a > 0)$ 在 yOz

平面上的投影曲线为 Γ_{yz} , 计算 $\int_{\Gamma_{yz}} \left(\frac{4a^2 - z^2}{2a} \cdot y^2 + y^2 z^2 \right) dy + \left(\frac{2}{3} y^3 z + e^z \sin z \right) dz$.



五、(15 分) 证明方程 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$, 当 n 为奇数时有且仅有一个实根.

六、(15 分) 已知 $a_1 > 0, a_2 > 0$.

(1) 若存在数列 $\{y_n\}$ 满足条件:

(a) $y_n > 0$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$; (c) $y_n = a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$

证明: $a_1 + a_2 > 1$.

(2) 若 $a_1 + a_2 > 1$, 证明存在满足条件(a)、(b)、(c)的数列 $\{y_n\}$.

(工科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. 计算 $\int \frac{dx}{\cos(3+x) \cdot \sin(5+x)}$.

3. 设 $f(x) = x^3 \arcsin x$, 求 $f^{(2008)}(0)$.

4. 求函数 $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2 - 2\sqrt{2}xy - y^2$ 的极值.

5. 假设立体 I 由 $1-z = x^2 + y^2$ 与 $z=0$ 围成, 密度为 ρ ; 立体 II 由 $1+z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z=0$ 围成, 密度为 1. 已知立体 I 和立体 II 组成的立体其重心位于原点 $(0, 0, 0)$, 求 ρ 的值.

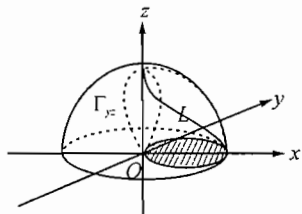
二、(20 分) (1) 证明 $f_n(x) = x^n + nx - 2$ (n 为正整数) 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一正根 a_n ;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$.

三、(20 分) 已知 $\int_0^2 \sin(x^2) dx = a$, 求 $\iint_D \sin(x-y)^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

四、(20 分) 设曲线 $L: \begin{cases} z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases} (a > 0)$ 在 $yo z$

平面上的投影曲线为 Γ_{yz} , 计算 $\int_{\Gamma_{yz}} \left(\frac{4a^2 - z^2}{2a} \cdot y^2 + y^2 z^2 \right) dy + \left(\frac{2}{3} y^3 z + e^z \sin z \right) dz$.



五、(15 分) 证明: 对 $\forall x \in \mathbf{R}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} > 0$.

六、(15 分) 已知 $a_1 > 0, a_2 > 0$.

(1) 若存在数列 $\{y_n\}$ 满足条件:

(a) $y_n > 0$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$; (c) $y_n = a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$

证明: $a_1 + a_2 > 1$.

(2) 若 $a_1 + a_2 > 1$, 证明存在满足条件(a)、(b)、(c)的数列 $\{y_n\}$.

(经管类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. 计算 $\int \frac{dx}{\cos(3+x) \cdot \sin(5+x)}$.

3. 设 $f(x) = x^3 \arcsin x$, 求 $f^{(2008)}(0)$.

4. 求曲线 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 2t + \int_1^t e^{-(ts)^2} ds \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处的切线方程.

5. 求曲线 $y = x \sin x, x \in [\pi, 2\pi]$ 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所得的旋转体体积.二、(20 分) (1) 证明 $f_n(x) = x^n + nx - 2$ (n 为正整数) 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一正根 a_n ;(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$.三、(20 分) 已知 t 为常数, 且 $\max_{x \in [0, 2\pi]} |\cos x + x - t| = \pi$, 求 t 的值.四、(20 分) 分析级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$ 的收敛性.五、(15 分) 证明: 对 $\forall x \in \mathbf{R}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} > 0$.六、(15 分) 已知 $a_1 > 0, a_2 > 0$.(1) 若存在数列 $\{y_n\}$ 满足条件:(a) $y_n > 0$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$; (c) $y_n = a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$ 证明: $a_1 + a_2 > 1$.(2) 若 $a_1 + a_2 > 1$, 证明存在满足条件(a)、(b)、(c)的数列 $\{y_n\}$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. 计算 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$.

3. 设 $f(x) = x^{2005} \arcsin x$, 求 $f^{(2008)}(0)$.

4. 求曲线 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 2t + \int_1^t e^{-(ts)^2} ds \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处的切线方程.

5. 求曲线 $y = x \sin x, x \in [\pi, 2\pi]$ 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所得的旋转体体积.

二、(20 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n + \sqrt{n}} + \frac{1}{n + \sqrt{2n}} + \frac{1}{n + \sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{n + \sqrt{n \cdot n}} \right)$.

三、(20 分) 设 f 在 $[0, 2]$ 上可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = f(2)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

四、(20 分) (1) 证明 $f_n(x) = x^n + nx - 2$ (n 为正整数) 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一正根 a_n ;
(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$.

五、(15 分) 已知 t 为常数, 且 $\max_{x \in [0, 2\pi]} |\cos x + x - t| = \pi$, 求 t 的值.

六、(15 分) 证明: 对 $\forall x \in \mathbf{R}, 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} > 0$.

2009 年浙江省大学生高等数学 (微积分)竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{\frac{1}{n}}$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}(\ln x - 1)^2} dx$.

3. 设 $f(x) = x^3 \sin^2 x$, 求 $f^{(2009)}(0)$.

4. 设 g 二阶可导, f 有二阶连续偏导数, $z = g[xf(x+y, 2y)]$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 设 f 为连续函数, $\varphi(x) = \int_0^x dv \int_0^x f(u+v-x) du$, 求 $\varphi'(x)$.

二、(满分 20 分) 设集合 $A_k = \{z \mid z = m^n, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq 1, n \geq 2, 1 \leq z \leq k\}$, 记 A_k^* 为 A_k 的元素个数, 证明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_k^*}{\sqrt{k}} = 1$.

三、(满分 20 分) 设 Ω 为由抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 与平面 $4x + 2y + z = 1$ 围成的立体, 其边界的平面部分为 S_1 , 曲面部分为 S_2 , p_0 为 S_2 上的一个点.

(1) 求以 p_0 为顶点, S_1 为底面的锥体体积 V ;

(2) 求 p_0 , 使 V 达到最大值.

四、(满分 20 分) 设 f 导函数连续, $R(x, y, z) = \int_0^{x^2+y^2} f(z-t) dt$, 曲面 S 为 $z = x^2 + y^2$ 被 $y + z = 1$ 所截的下面部分, 内侧, L 为 S 的正向边界, 求:

$$\oint_L 2xz f(z - x^2 - y^2) dx + [x^3 + 2yz f(z - x^2 - y^2)] dy + R(x, y, z) dz.$$

五、(满分 15 分) 设 $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} + x - r$, 其中 $r > 0$,

(1) 证明: $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一的零点 x_n ;

(2) 问 r 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛? 发散?

六、(满分 15 分) 设函数 f 满足 $f''(x) > 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 证明

$$\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \max\{f(0), f(1)\}.$$

(工科类)

一、计算题(每小题 12 分, 满分 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{\frac{1}{n}}.$

2. 计算不定积分 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}(\ln x - 1)^2} dx.$

3. 设 $f(x) = x^3 \sin^2 x$, 求 $f^{(2009)}(0).$

4. 设 g 二阶可导, f 有二阶连续偏导数, $z = g[xf(x+y, 2y)]$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$

5. 设 f 为连续函数, $\varphi(x) = \int_0^x dv \int_0^x f(u+v-x) du$, 求 $\varphi'(x).$

二、(满分 20 分) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{ax^2 + bx}{1-x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求常数 a, b 的值.

三、(满分 20 分) 设 Ω 为由抛物面 $z = 2x^2 + y^2$ 与平面 $4x + 2y + z = 1$ 围成的立体, 其边界的平面部分为 S_1 , 曲面部分为 S_2 , p_0 为 S_2 上的一个点.

(1) 求以 p_0 为顶点, S_1 为底面的锥体体积 V ;

(2) 求 p_0 , 使 V 达到最大值.

四、(满分 20 分) 设 f 导函数连续, $R(x, y, z) = \int_0^{x^2+y^2} f(z-t) dt$, 曲面 S 为 $z = x^2 + y^2$ 被 $y + z = 1$ 所截的下面部分, 内侧, L 为 S 的正向边界, 求:

$$\oint_L 2xz f(z - x^2 - y^2) dx + [x^3 + 2yz f(z - x^2 - y^2)] dy + R(x, y, z) dz.$$

五、(满分 15 分) 设 $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} + x - r$, 其中 $r > 0$,

(1) 证明: $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一的零点 x_n ;

(2) 问 r 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛? 发散?

六、(满分 15 分) 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) \geq f(x)$, $f(0) \geq 0$, 证明: $f(x) \geq 0 (x \geq 0)$.

(经管类)

一、计算题:(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(n+i)}$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}(\ln x - 1)^2} dx$.

3. 设 $f(x) = x \sin^2 x$, 求 $f^{(2009)}(0)$.

4. 设 $\begin{cases} x = \cot t \\ y = \frac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}, t \in (0, \pi)$, 求此曲线的拐点.

5. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{ax^2 + bx}{1-x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求常数 a, b 的值.

二、(满分 20 分) 设 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$, 比较 $(\int_0^1 f(x) dx)^2$ 与 $\int_0^1 f^3(x) dx$ 的大小, 并证明之.

三、(满分 20 分) 设 $g(x) = \int_{-1}^1 |x-t| e^{t^2} dt$, 求 $g(x)$ 的最小值.

四、(满分 20 分) 设曲线 $y = e^{-x} \sqrt{|\sin x|}, 0 \leq x \leq n\pi, n \in \mathbb{Z}^+$, 求此曲线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V_n , 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$.

五、(满分 15 分) 设 $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} + x - r$, 其中 $r > 0$,

(1) 证明: $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有唯一的零点 x_n ;

(2) 问 r 为何值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛? 发散?

六、(满分 15 分) 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x) \geq f(x), f(0) \geq 0$, 证明: $f(x) \geq 0 (x \geq 0)$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 12 分,满分 60 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \sin \frac{i\pi}{n}$.

2. 计算不定积分 $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx$.

3. 设 $f(x) = \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 1\right) \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 2\right) \cdots \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 100\right)$, 求 $f'(1)$.

4. 设 $\begin{cases} x = \cot t \\ y = \frac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}, t \in (0, \pi)$, 求此曲线的拐点.

5. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [e^x + ax^2 + bx]^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求常数 a, b 的值.

二、(满分 20 分) 设 $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$, 证明: 当 $x > 0$ 时, $\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2 \geq \int_0^x f^3(t) dt$.

三、(满分 20 分) 设 $g(x) = \int_{-1}^1 |x - t| e^{t^2} dt$, 求 $g(x)$ 的最小值.

四、(满分 20 分) 设曲线 $y = e^{-x} \sqrt{|\sin x|}, 0 \leq x \leq 2\pi$, 求此曲线与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

五、(满分 15 分) 设 $F(t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx$, 证明:

(1) $F(t)$ 为偶函数; (2) $F(t^2) = 2F(t)$.

六、(满分 15 分) 设 f 为连续函数, 且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 证明在 $[0, 1]$ 上方程 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 有唯一解.

2010 年浙江省大学生高等数学 (微积分)竞赛试题

(数学类)

一、计算题(每小题 14 分,满分 70 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$.

2. 计算 $\iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)} \right] dx dy$, 其中 $0 \leq \rho < 1$.

3. 请用 a, b 描述圆 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 落在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内的充分必要条件, 并求此时椭圆的最小面积.

4. 已知分段光滑的简单闭曲线 Γ (约当曲线) 落在平面 $\pi: ax + by + cz + 1 = 0$ 上, 设 Γ 在 π 上围成的面积为 A , 求 $\oint_{\Gamma} \frac{(bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz}{ax + by + cz}$, 其中 $\vec{n}$ 与 Γ 的方向成右手系.

5. 设 f 连续, 满足 $f(x) = x - 2 \int_0^x \exp(x^2 - t^2) f(t) dt$ 且 $f(1) = 1/e$, 求 $f^{(n)}(1)$ 的值.

二、(满分 20) 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\} dx$, $n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

三、(满分 20 分) 设函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

四、(满分 20 分) 设非负函数 f 在 $[0, 1]$ 上满足 $\forall x, y, f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 且 $f(1) = 1$,

证明: (1) $f(x) \leq 2x, x \in [0, 1]$.

(2) $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{2}$.

五、(满分 20 分) 设全体正整数集合为 $\mathbb{N}^+$, 若集合 $G \subset \mathbb{N}^+$ 对加法封闭 (即 $\forall x, y \in G \Rightarrow x+y \in G$), 且 G 内所有元素的最大公约数为 1, 证明: 存在正整数 N , 当正整数 $n > N$ 时, $n \in G$.

(工科类)

一、计算题(每小题 14 分,满分 70 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$.

2. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(2-2x+x^2)}$.

3. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,求 $\sin A + \sin B + \sin C - \cos A - \cos B - \cos C$ 的最大值和最小值.

4. 已知分段光滑的简单闭曲线 Γ (约当曲线) 落在平面 $\pi: ax + by + cz + 1 = 0$ 上, 设 Γ 在 π 上围成的面积为 A , 求 $\oint_{\Gamma} \frac{(bx - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz}{ax + by + cz}$, 其中 $\vec{n}$ 与 Γ 的方向成右手系.

5. 设 f 连续, 满足 $f(x) = \sqrt{x} + \int_0^x \exp(x^2 - t^2)f(t)dt$, 求 $f'(1) - 3f(1)$ 的值.

二、(满分 20 分) 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\}dx, n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

三、(满分 20 分) 设有圆盘随着时间 t 的变化, 圆盘中心沿曲线 $L: x = \cos t, y = \sin t, z = t^2 (t \geq 0)$ 向空间移动, 且圆盘面的法向与 L 的切向一致. 若圆盘半径 $r(t)$ 随时间改变, 有 $r(t) = t^{\frac{3}{2}}$, 求在时间段 $[0, \frac{1}{2}]$ 内圆盘所扫过的空间体积.

四、(满分 20) 证明: 当 $\forall x > 0, \int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt < \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

五、(满分 20 分) 证明: $\tan^2 x + 2\sin^2 x > 3x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(经管类)

一、计算题(每小题 14 分,满分 70 分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right]^n$.

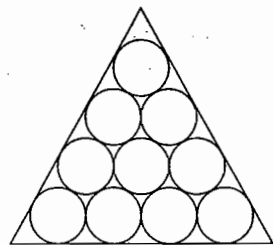
2. 求不定积分 $\int \frac{e^x(1 + \sin x \cos x)}{\cos^2 x} dx$.

3. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\sin A + \sin B + \sin C - \cos A - \cos B - \cos C$ 的最大值和最小值.

4. 设 $[x]$ 为小于等于 x 的最大整数, $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4\}$, 求 $\iint_D [x+y] dx dy$.

5. 设 f 连续, 满足 $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f'(t) dt$, 求 $f'(0)$.

二、(满分 20 分) 设有一个等边三角形, 内部放满 n 排半径相同的圆, 彼此相切(如图为 $n=4$ 的情形), 记 A 为等边三角形的面积, A_n 为 n 排圆的面积之和, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A}$.



三、(满分 20 分) 设 $f(x) = e^x P(x)$, 其中 $P(x)$ 为 5 次多项式, 证明:

- (1) $f(x)$ 必有极值点;
- (2) $f(x)$ 必有奇数个极值点.

四、(满分 20 分) 证明: 当 $\forall x > 0$, $\int_x^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt < \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

五、(满分 20 分) 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\} dx$, $n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(文科与专科类)

一、计算题(每小题 14 分, 满分 70 分)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))^2 = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x)$.

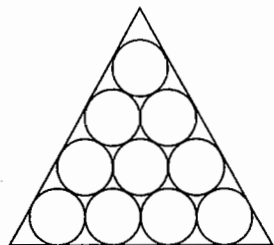
2. 求不定积分 $\int \frac{e^x(1 + \sin x \cos x)}{\cos^2 x} dx$.

3. 请用 a, b 描述圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 落在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内的充分必要条件.

4. 求曲线 $y = 6 - x^2$ 与直线 $y = 5$ 所围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V .

5. 设 f 连续, 满足 $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f'(t) dt$, 求 $f'(0)$.

二、(满分 20 分) 设有一个等边三角形, 内部放满 n 排半径相同的圆, 彼此相切(如图为 $n=4$ 的情形), 记 A 为等边三角形的面积, A_n 为 n 排圆的面积之和, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A}$.



三、(满分 20 分) 计算 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

四、(满分 20 分) 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\} dx, n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

五、(满分 20 分) 设 $f(x) = e^x(x^3 + ax^2 + bx + c)$, 证明:

- (1) $f(x)$ 必有极值点;
- (2) $f(x)$ 必有奇数个极值点.

练习题参考答案及历届试题评析

第一讲 极限

1. 略

2. (1) $\begin{cases} \text{当 } k > 2 \text{ 时: } 0, \\ \text{当 } k = 2 \text{ 时: } \frac{1}{2}, \\ \text{当 } k < 2 \text{ 时: } \infty. \end{cases}$ (2) 2 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) π (7) $\frac{\pi}{6}$ (8) $e^{\frac{\pi+1}{2}}$ (9) -2 (10) 3

(11) $-\frac{1}{3}$ (12) 0 (13) 2 (14) $e^{-\frac{1}{e}}$ (15) $\frac{1}{6}$

3. $\sqrt{3}$ 4. 当 $0 \leq a \leq 1$ 时: 1; 当 $1 < a \leq 2$ 时: a ; 当 $a > 2$ 时: $\frac{a^2}{2}$.

5. 提示: 先证 $\{a_n\}$ 单调增加, 再用反证法. 6. 2 7. e

8. 提示: $f(x) = \cos x - x$ 的一个根 x_0 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 内, 再令: $u_1 = \cos x, u_{n+1} = \cos u_n (n = 1, 2, 3, \dots)$,

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

9. $\frac{1}{2} F'(0)$ 10. $(-1, 1]$ 11. $\frac{a}{\sqrt{1+q^2}}$ 米 12. (1) $\frac{4}{e}$ (2) $\frac{1}{e}$

13. $\frac{1}{2}$ (提示: 利用幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{\sqrt{k!(k+2)}}$ 及其和函数)

14. 当 $a < 0$ 时, $\{x_n\}$ 发散; 当 $a \geq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$

15. 提示: 利用“单调有界数列必有极限”这个定理.

16. 提示: 先证明 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 有界, 再证其下确界为数列的极限.

17. 2π (提示: 利用 e^x 的泰勒级数)

第二讲 连续、导数及其应用

1. $a = \frac{2}{\pi}$

2. (1) 不连续 (2) 连续 (3) 分别在 $(0, 1)$ 内和 $(1, +\infty)$ 内连续, $x = 1$ 为间断点.

3. (1) $x = 0$ 为可去间断点, $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第二类间断点 (2) $x = 0$ 为第二类间断点, $x = n (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第一类间断点 (3) $x = \frac{2}{3}$ 为第二类间断点, $x = 1$ 为第一类间断点.

4. 提示:利用连续的定义和极限的保号性.

5. 提示:利用介值定理.

6. 提示:利用介值定理和极限的保号性.

7. 提示:令 $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, 计算 $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$, 再利用介值定理.

$$8. (1) -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}} \quad (2) \frac{1+e^y \cos t}{(6t+2)(1-e^y \sin t)} \quad (3) \frac{3}{16 \cos t}$$

$$(4) y^{(n)} = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x)^{(n)} = \frac{3}{2} \cdot 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(5) (-1)^n \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 2\right) \cdots \left(\frac{1}{3} + n\right) (1+x)^{-\frac{1}{3}-n} + n(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 2\right) \cdots \left(\frac{1}{3} + n-1\right) \cdot (1+x)^{\frac{2}{3}-n}$$

$$(6) -\frac{2}{y^3} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$$

$$(7) (-1)^n n! m^n$$

$$9. a = e^{\frac{1}{e}}, \text{切点} \left(e, \frac{1}{\ln a}\right)$$

$$10. g(0) = 0, g'(0) = 0.$$

11. 当 $c < -54$ 或 $c > 54$ 时, 有一个根; 当 $c = \pm 54$ 时有 2 个根; 当 $-54 < c < 54$ 时, 有三个根.

12. 提示: (1) 利用函数的单调性; (2) 不等式两边先取自然对数, 再证.

13. 提示: 分析 $f'(x)$, 使其在 $(a, +\infty)$ 内某个子区间满足罗尔定理条件.

$$14. \frac{1}{8}$$

15. 提示: (1) 利用介值定理和函数的单调性 (2) 考察 $f_n(\arccos \frac{1}{n})$, 并利用夹逼定理.

16. 不可导

$$17. f(x)_{x=0} = 5, x > 0$$

18. 提示: 考察 $F(x) = (b-x)^a f(x)$, 用罗尔定理.

19. 提示: 作函数 $F(x) = f(x) - (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, 当 $c \neq a_i; i = 1, 2, \cdots, n$ 时, 连续用罗尔定理即证.

20. 提示: 证明 $\forall \bar{x} \in (a, b), \exists \delta > 0$, 当 $|x - \bar{x}| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$ (对 $\forall \epsilon > 0$) 成立.

$$21. (1) \lambda = \frac{y-x_0}{y-x} \quad (2) \text{利用 } f(x) \text{ 在点 } \lambda x + (1-\lambda)y \text{ 处的一阶泰勒公式.}$$

$$22. 4\pi(\text{m}^3/\text{s}), 0.8\pi(\text{m}^2/\text{s})$$

23. 提示: 用 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 表示 $f(x)$ 在圆周上的定义域, 证明 $\exists \theta' \in [0, \pi]$, 使 $f(\theta') = f(\theta' + \pi)$.

24. 三个

$$25. 3\sqrt{3} \cdot |m|$$

$$26. \frac{1}{x} f(x) - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(x) dx, \text{连续}$$

$$27. h = 4r, V_{\min} = \frac{8\pi}{3}r^3$$

$$28. \text{正方形铁丝长为 } \frac{4a}{4+\pi}, \text{圆形铁丝长为 } \frac{\pi a}{4+\pi}, S_{\min} = \frac{a^2}{4(4+\pi)}$$

第三讲 不定积分

$$1. (1) \frac{1}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$$

$$(2) \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} + C$$

$$(4) \arctan \sqrt{x} + C$$

$$(5) x \tan \frac{x}{2} + C \left(\text{或 } \frac{x(1-\cos x)}{\sin x} + C \right)$$

$$(6) e^x \sin^2 x - \frac{2}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + C$$

$$(7) \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$(8) -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C$$

$$(9) 2 \ln |x^2 - 2x - 1| - \frac{9\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x - 1}{\sqrt{2} - x + 1} \right| + C$$

$$(10) -\frac{1}{2}(e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C$$

$$(11) \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \tan \left(\frac{x+4}{2} \right) \right| + C, \text{ 其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$(12) -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$(13) \frac{e^x}{x+2} + C$$

$$(14) -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \cot x + C$$

$$(15) \frac{\ln x}{1-x} + \ln |1-x| - \ln |x| + C$$

$$(16) \frac{1}{8} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{4(1+\cos x)} + C$$

$$(17) \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}} + C$$

$$(18) a \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] - \frac{a-b}{2} (\arctan x)^2 + C$$

$$(19) -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C$$

$$(20) \ln(x+a) \ln(x+b) + C$$

$$2. x^2 \sin x + 3x \cos x - 3 \sin x + C$$

$$3. \frac{1}{2}$$

第四讲 定积分

$$1. (1) -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1) \quad (2) \frac{35}{64}\pi^2 \quad (3) 6 - \frac{3}{2}\pi \quad (4) \frac{1}{8}(\pi-2) \quad (5) \frac{\pi^2}{4} \quad (6) \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$$

$$(7) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (8) \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

2. 提示: 假设对某个 $\varepsilon > 0$, 存在一个序列 $x_n \rightarrow \infty$ 满足 $x_n f(x_n) \geq \varepsilon$, 于是, 当 f 是单调减少时, 对于足够大的 x , 我们有 $f(x) \geq \varepsilon/x$, 它与 $\int_0^\infty f(x) dx$ 的收敛性相矛盾, 结果随之可得.

3. 提示: 不存在.

4. 提示: 构造 $\sum S_n$, 其中 $S_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) dx$, 通过证明 $\sum S_n$ 收敛来说明 $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$ 收敛, $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$ 同理可得.

$$5. \frac{3}{4}$$

6. 提示: $\int_0^x \varphi(u) du = \frac{1}{2} \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2$, 由 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ 单调减少, 得 $\int_0^x \varphi(u) du \leq 0$, 当 $x \geq 0$ 时.

7. 提示: 用“变限法”.

8. 提示: 参见第四讲例 4.6.

$$9. \frac{\pi}{6}$$

$$10. \frac{16}{3} R^3, R \text{ 为底面半径.}$$

$$11. \textcircled{1} \frac{3\pi}{8} a^2 \quad \textcircled{2} 6a \quad \textcircled{3} \frac{24}{5} \pi a^2 \quad \textcircled{4} \frac{32}{105} \pi a^3$$

$$12. 6\pi a^2$$

$$13. 4a \left(1 + 3\sqrt{3} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$14. \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi a^3$$

$$15. \frac{4}{3} \mu g \pi R^4 (\mu \text{ 为密度})$$

16. $4\pi\rho gR^2H$

17. $\sqrt{2}-1$

18. 提示: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

19. 提示: $f(1)$ 为 $f(x) = \int_0^1 t(1-t)\sin^{2n}t dt$ 的最大值, 又当 $t \geq 0$ 时, $\sin^{2n}t \leq t^{2n}$, 由此得出 $f(1)$.

20. 提示: 先利用 Cauchy-Schwarz 不等式证明 $\{g_n\}$ 在上确界范数下是一个 Cauchy 序列.

第五讲 无穷级数

1. (1) 发散 (2) 收敛 (3) 收敛 (4) 收敛

2. (1) 发散 (2) 条件收敛 (3) $0 < P \leq \frac{1}{3}$, 条件收敛; $P > \frac{1}{3}$, 绝对收敛 (4) 发散

3. 收敛

4. $(-\infty, +\infty), e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

5. $(-1, 1)$

6. $f(x) = 1 - x + x^{16} - x^{17} + x^{32} - x^{33} + \dots, |x| < 1$

7. 提示: 将 x 展开成以 2π 为周期的只含正弦的傅里叶级数.

8. (1) $\frac{x}{2}(1 + \cos x) - \sin x \cdot \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ (2) $e^{\cos x} \cos(\sin x)$

9. (1) $\frac{\pi^2}{12}$ (2) $2 - \frac{\pi^2}{6}$

10. 提示: $\frac{1}{x^x} = e^{-x \ln x}$, 展开后再积分.

11. 证明略

12. $(-1, +\infty)$

第六讲 向量运算和空间解析几何

1. 1

2. 1

3. $4x - 2y + z = 2\sqrt[3]{6a}$

4. $a = -5, R = \frac{2}{3}$ 或 $a = -9, R = 2$

5. $x + y \pm \sqrt{2}z + 2 = 0$

6. $z = 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1;$

$x = 0, \left(\frac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0;$

$y = 0, x \leq z \leq \sqrt{2x}.$

第七讲 多元函数的可微性与偏导数

1. $du = e^{xy}(ydx + xdy),$

$$d^2u = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2)$$

2. $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = e^{\ln 2} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 2\ln 2 + 1$

3. $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$

4. $f_x = \cos[x\sin(ysinz)]\sin(ysinz);$

$$f_y = \cos[x\sin(ysinz)] \cdot x\cos(ysinz) \cdot \sin z;$$

$$f_z = \cos[x\sin(ysinz)] \cdot x\cos(ysinz) \cdot y\cos z.$$

5. $dz = (f'_1 + f'_2 + yf'_3)dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3)dy,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{31} + f''_{11} - f''_{22} + xyf''_{33} + (x+y)f''_{13} + (x-y)f''_{23}$$

6. (1) $dz = \frac{(-\varphi' + 2x)dx + (-\varphi' + 2y)dy}{\varphi' + 1}$ (2) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2\varphi''(1+2x)}{(\varphi' + 1)^3}$

7. $\frac{dz}{dy} = \frac{f'_x\varphi'_y + f'_y}{1 - f'_x\varphi'_z}$

8. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

9. $u_{xx} = u_{yy} = -\frac{4}{3}x, u_{xy} = \frac{5}{3}x$

10. $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+8xyz}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2y}{1+8xyz}$

11. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0) = 0$

12. $\varphi'(0) = m + n(m+n)$

13. $f(u) = \ln u$

14. $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2y + xy^2) + x^2 + y$

15. $u = \frac{3}{2}(xyz)^{\frac{2}{3}}$

16. (1) $f(x) - g(x) = \frac{C}{x}$ (2) $u = \varphi(xy) - C\ln y + C_0$ (C, C_0 为任意常数)

17. 提示: 在充分性证明中, 令 $ax + by = t, y = u$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$.

18. 提示: 利用二元函数可微的定义证明之.

19. 提示: 在充分性证明中考察 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \ln u}{\partial x} \right)$.

20. $F(tx, ty) = t^2 F(x, y),$

$$xF'_1 + yF'_2 = 2tF(x, y),$$

$$x^2 F''_{11} + 2xy F''_{12} + y^2 F''_{22} = 2F.$$

21. $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$, 两边对 t 求导, 令 $t = 1$ 即得.

22. 提示: 由已知可得 $x = u, y = \frac{u}{1+uv}$.

$$23. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

24. 令 $F(0) = f(\cos\theta, \sin\theta)$ 利用罗尔定理即得.

25. $a = b, b = 24, c = -8$.

第八讲 隐函数的微分法

$$1. dz = -\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx + \sin 2y dy)$$

$$2. \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{-f'_x x^2 + f'_y \cdot xy}{xu + 2y^2}, \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{f'_x \cdot 2y + f'_y \cdot u}{xu + 2y^2}$$

$$3. y''(0) = -3$$

$$4. -\left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{7}{4} \frac{y^4}{x^4} + \frac{4}{5} \frac{y^5}{x^5}\right) + C$$

$$5. (1+t^2)[\ln(1+t^2)+1]$$

6. 切线 $y = x + 1$

7. 提示: 恒与以 $\{1, 1, 1\}$ 为方向矢量的直线平行.

8. 常数为 -2

$$9. \left(\pm \frac{a^2}{\sqrt{2a^2+c^2}}, \pm \frac{a^2}{\sqrt{2a^2+c^2}}, \pm \frac{c^2}{\sqrt{2a^2+c^2}}\right)$$

$$10. 6x + y + 2z = 5 \text{ 或 } 10x + 5y + 6z = 5$$

第九讲 极值问题

1. 极小值 -8

2. 极小值 $-\frac{1}{e}$

3. 极大值 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

4. 极大值 $\frac{ab}{3\sqrt{3}}$, 极小值 $-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$

5. 极小值 $-(4+2\sqrt{b})$, 极大值 $2\sqrt{b}-4$

6. 极小值 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, 极大值 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. $u_{\max} = 72, u_{\min} = 6$

8. $S_{\max} = 2(1 + \sqrt{33})$

9. $\frac{7}{8}\sqrt{2}$

10. $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$

11. 最大值 $\ln(6\sqrt{3}r^6)$

12. 矩形两边分别为 $\frac{p}{3}$ 及 $\frac{2}{3}p$

13. 三边长分别为 $\frac{p}{2}, \frac{3}{4}p, \frac{3}{4}p$, 绕 $\frac{p}{2}$ 边旋转

14. 最近点 $(1, 1, 1)$, 最远点 $(-5, -5, 5)$

15. $\cos(\mathbf{P}_0\mathbf{A}, \mathbf{P}_0\mathbf{B}) = \cos(\mathbf{P}_0\mathbf{A}, \mathbf{P}_0\mathbf{C}) = \cos(\mathbf{P}_0\mathbf{B}, \mathbf{P}_0\mathbf{C}) = -\frac{1}{2}$

第十讲 重积分

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{1}{6}\text{m}^3$ 3. $\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$ 4. $-\frac{8}{3}$ 5. $\frac{\pi}{4}$ 6. $\ln^2 2$ 7. $\frac{19}{4} + \ln 2$ 8. $\frac{11}{40}$ 9. $\frac{5}{192}\pi$ 10. $\frac{4}{15}\pi$

11. $\frac{1}{2}$ 12. $e - \frac{1}{e}$ 13. $\frac{2}{9}$ 14. $\frac{\pi}{2}$ 15. $\int_0^{2\pi} f(t\cos\theta, t\sin\theta) t d\theta$ 16. $\frac{4}{5}\pi$ 17. (1) $\frac{3}{2} + \ln 2$ (2) 略

18. 提示: 利用极坐标计算左边极限

19. 提示: 令 $x - y = t$

20. 提示: $\iint_D f(x-y) dx dy = \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a f(x-y) dy$, 作变换 $u = x - y$.

21. $\frac{40}{3}\pi$

22. $\frac{2}{3}(2HR - H^2)^{\frac{3}{2}} + 2(H-R) \left[\frac{\pi R^2}{4} + \frac{1}{2}(H-R) \sqrt{2HR - H^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{H-R}{R} \right]$

23. (1) $\frac{pA^2}{2C} - \frac{qB^2}{2C} - D > 0$

(2) $V = \frac{pA^2 + qB^2 - 2CD}{4C^2} AB\pi$, $S = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{C^2} AB\pi$

24. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$

25. $r = \frac{4}{3}R$, $S_{\max} = \frac{32}{27}\pi R^2$

第十一讲 曲线积分

1. $4l$ 2. $\frac{13}{6}$ 3. $-\frac{1}{2}\pi^2$ 4. $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$ 5. -4 6. $\frac{\pi}{4} - \frac{158}{3}$ 7. -24 8. $2\pi u(0, 0)$

9. 提示: 利用极坐标、格林公式即得.

10. (1) $(2,0)(-2,0)$ 均在 L 所围区域外部时, $I = 0$;
 (2) $(2,0)(-2,0)$ 均在 L 所围区域内部时, $I = -4\pi$;
 (3) $(2,0)(-2,0)$ 一个在外部, 一个在内部时, $I = -2\pi$.
11. (1) $f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$, $g(x) = -\frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$ (2) $\frac{1}{4}(7e - e^{-1})$
12. 提示: 利用不等式 $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$
13. (1) 提示: 考察 $\frac{x}{y} + F(xy)$ 的全微分, 其中 F 为 f 的原函数 (2) $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$
14. $f(x, y) = x^2 + 2y - 1$
15. $f(x) = x^2, A = 2\pi$

第十二讲 曲面积分

1. 4π 2. $\frac{13}{2}\pi e^4 - \frac{3}{2}\pi e^2 - 3\pi$ 3. 4π 4. (1) 0 (2) 128π 5. $\frac{1}{4}ah\sqrt{a^2+h^2} + \frac{\pi h^3}{8}$ 6. 0 7. $2\pi a^2 b$
8. $\frac{2\pi a^4}{\sqrt{a^2+1}}$ 9. $\frac{59}{30}\pi$ 10. $-Cx^2 + C - 2$ 11. $I(t) = \iint_{\Sigma} (1-x^2-y^2) dS = 2\pi \int_0^{\sqrt{t}} r(1-r^2) \sqrt{1+4r^2} dr$,
 $t \in (0, +\infty)$, 令 $I'(t) = 0$ 得 $I(t)$ 最大值为 $I(1) = \frac{2\pi}{15}(8\sqrt{2}-7)$ 12. $\frac{4\pi}{3}abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$
13. $4\pi \tan 1$ 14. 提示: 利用高斯公式 15. $\frac{1}{3}Sh$

第十三讲 场论初步

1. $\text{grad} f(x, y, z) = \left[\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \right]$
 $\text{div}[\text{grad} f(x, y, z)] = \frac{6}{x^2+y^2+z^2}$
 $\text{rot}[\text{grad} f(x, y, z)] = (0, 0, 0)$
2. $\text{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0, \text{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$

浙江省首届高等数学(微积分)竞赛试题评析

一、计算题

1. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(e^x - 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x(e^x - 1)} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1 + xe^x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2e^x + xe^x} = 1.$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ 解: } \iint_D |xy-1| dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dy \left[\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{y}} (1-xy) dx + \int_{\frac{1}{y}}^2 (xy-1) dx \right] \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dy \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{y}{2} \left(4 - \frac{1}{y^2} \right) - \left(2 - \frac{1}{y} \right) \right] \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{17}{8}y - \frac{5}{2} \right) dy = 2\ln 2 + \frac{15}{64}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \text{ 解: } y' &= 2xe^x + x^2e^x = (2x+x^2)e^x, y'' = (2+4x+x^2)e^x, \\
 ce^{hx} &= y'' + ay' + by = (2+(4+2a)x + (1+a+b)x^2)e^x, \\
 \text{所以, } a &= 2, b = 1, c = 2, h = 1.
 \end{aligned}$$

$$4. \text{ 解: 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ 则 } F(0) = 0, F'(x)[F(x) + 1] = \frac{xe^x}{2(1+x)^2},$$

$$\text{那么, } \int_0^x [F+1] dF = \int_0^x \frac{xe^x}{2(1+x)^2} dx, \text{ 则有 } \frac{F^2}{2} + F = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{1+x} - 1 \right),$$

$$\text{即, } F(x) = -1 + \sqrt{\frac{e^x}{1+x}}. \text{ 所以 } f(x) = F'(x) = \frac{x\sqrt{(1+x)e^x}}{2(1+x)^2}.$$

$$5. \text{ 解: 不难得到 } S_1 = \arctan \frac{1}{2},$$

$$\tan S_2 = \frac{\tan(\arctan \frac{1}{2}) + \tan(\arctan \frac{1}{8})}{1 - \tan(\arctan \frac{1}{2})\tan(\arctan \frac{1}{8})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以, } S_2 = \arctan \frac{2}{3}; \text{ 同理可得 } S_3 = \arctan \frac{3}{4},$$

$$\text{用数学归纳法可证明 } S_n = \arctan \frac{n}{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$6. \text{ 解: } \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 d(xe^{x+\frac{1}{x}}) = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

二、解: 椭圆柱体 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的横截面积(即平面 $z=0$ 含在椭圆柱体 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的面积)是

$$\begin{aligned}
 4 \int_0^2 \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}} dx &= 12 \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = 24 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\alpha + 1) d\alpha = 6\pi,
 \end{aligned}$$

而平面 $x+2y-2z=1$ 的法线方向是 $(1, 2, -2)$, 则平面 $x+2y-2z=1$ 与平面 $z=0$ 成 $\arccos \frac{2}{3}$

角度. 所以所求面积是 $6\pi \times \frac{3}{2} = 9\pi$.

三、证明:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy + \int_0^{\pi} \frac{\sin(y+\pi)}{2\sqrt{y+\pi}} dy \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y}} dy - \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2\sqrt{y+\pi}} dy = \int_0^{\pi} \sin y \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y+\pi}} \right) dy > 0.
 \end{aligned}$$

得证.

四、证明:令 $x = \cos\theta, y = \sin\theta$, 令 $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = f(x, y)$,

由题意有 $g(2\pi) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(0)$,

所以存在 $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 使得 $\frac{d}{d\theta}g(\theta_1) = \frac{d}{d\theta}g(\theta_2) = 0$,

取 $x_1 = \cos\theta_1, y_1 = \sin\theta_1, x_2 = \cos\theta_2, y_2 = \sin\theta_2$, 则有

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x_1, y_1) - x_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y_1) = y_2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_2, y_2) - x_2 \frac{\partial}{\partial y} f(x_2, y_2) = 0.$$

五、证明:令 $f(x) = e^x - x$, 则 $f(0) = 1, f'(x) = e^x - 1 > 0$, 当 $x > 0$. 所以

$$e^{b_n} = e^{a_n} - a_n > 1, \quad b_n > 0.$$

令 $g(x) = e^{x^2}$, 则 $g(0) = 1, g'(x) = 2xe^{x^2}$. 注意到 $f'(0) = 0, g'(0) = 0$, 而且

$$f''(x) = e^x, \quad g''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}, \quad f''(x) \leq g''(x),$$

当 $0 \leq x \leq \ln 2$ 时, 我们有 $f(x) \leq g(x)$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 所以存在 N , 使得任意 n

$\geq N$, 有 $0 < a_n \leq \ln 2$, 则 $e^{a_n^2} \geq e^{a_n} - a_n = e^{b_n}$, 也就是说 $0 < \frac{b_n}{a_n} \leq a_n$. 那么由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 我们就可

以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 也收敛.

六、解:把 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ 化为 $a_{n+2} - 3a_{n+1} = -1(a_{n+1} - 3a_n)$, 则 $\{a_{n+2} - 3a_{n+1}\}$ 是以 -2 为首项、 -1 为公比的等比数列, 所以 $a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(-1)^n$. 此式又可化为

$$\left[a_{n+2} + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}\right] = 3\left[a_{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\right],$$

则 $\left\{a_n + \frac{1}{2}(-1)^n\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项、 3 为公比的等比数列, 所以 $a_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$. 由于

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 $\frac{1}{3}$, 收敛域是 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 和函数是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n = -\frac{1}{2} \times \frac{-x}{1+x} + \frac{1}{6} \times \frac{3x}{1-3x} = \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-3x)}.$$

2003 年浙江省大学生高等数学(微积分) 竞赛试题评析

(数学类)

一、计算题

$$1. \text{ 解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin(u^2) du}{x \cdot x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4) \cdot 2x}{6x^5} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$2. \text{ 解: } \int_0^1 G(x) dx = xG(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dG(x)$$

$$= - \int_0^1 x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \cos x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} (\cos 1 - 1).$$

3. 解: $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \frac{x^2+1}{1+x^4} dx + \int_0^\infty \frac{x^2-1}{1+x^4} dx \right),$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2+1}{1+x^4} dx &= \int_0^\infty \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \frac{d\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan\left(\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \Big|_0^\infty = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi, \\ \int_0^\infty \frac{x^2-1}{1+x^4} dx &= \int_0^\infty \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^\infty \frac{d\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)}{1 - \left(\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{1 - \left(\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)}{1 + \left(\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)} \right| \Big|_0^\infty = 0, \end{aligned}$$

所以, 原式 $= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$

4. 解: 对二项公式 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$ 两边求导得:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^{k-1}, \text{ 两边乘 } x \text{ 得:}$$

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n C_n^k k x^k, \text{ 再对两边求导得:}$$

$$n((1+x)^{n-1} + (n-1)x(1+x)^{n-2}) = \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 x^{k-1}, \text{ 令 } x=1, \sum_{k=1}^n C_n^k k^2 = n(n+1)2^{n-2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)} n(n+1)2^{n-2} = \frac{1}{4}.$$

二、解: 设曲线 $C: y = f(x)$, 则 $x = f^{-1}(y)$.

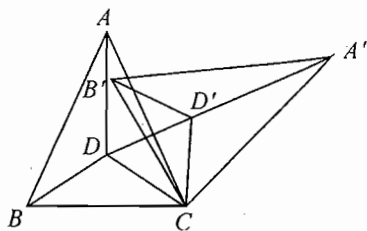
$$S_1 = \int_0^{y_0} (2x^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} x_0^3;$$

$$S_2 = \int_0^{y_0} \left(\sqrt{\frac{y}{2}} - f^{-1}(y) \right) dy = \frac{\sqrt{2}}{3} y_0^{\frac{3}{2}} - \int_0^{y_0} f^{-1}(y) dy.$$

$$S_1 = S_2, \text{ 则 } \int_0^{y_0} f^{-1}(y) dy = \frac{\sqrt{2}}{4} y_0^{\frac{3}{2}}, \text{ 所以 } f^{-1}(y) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{y},$$

所以曲线 $C: y = \frac{32}{9} x^2.$

三、证明：令锐角三角形为 $\triangle ABC$ ，其中一点记为 D 。如图，以点 C 为固定点，把三角形 $\triangle ABC$ 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'B'C$ ，且 D 变为 D' 。那么 $|DC| = |D'C|$ ， $|DA| = |A'D'|$ ， $\angle ADC = \angle A'D'C$ 。



因为 $|DC| = |D'C|$ ， $\angle DCD' = 60^\circ$ ，所以 $\triangle DCD'$ 是等边三角形， $\angle CDD' = \angle DD'C = 60^\circ$ ， $|DC| = |D'D|$ 。

所以 $|AD| + |BD| + |CD| = |A'D'| + |BD| + |DD'|$ 。利用两点之间直线段最短的性质，我们就得到：点 D 到三顶点距离之和为最小，当且仅当点 B, D, D', A' 共线。这就要求 $\angle BDC = \angle CD'A' = 120^\circ$ ，即 $\angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$ 。

综上所述，锐角三角形 $\triangle ABC$ 内一点 D 到三顶点连线成等角时，该点到三顶点距离之和为最小。

四、证明：令 $w = t^2$ ，则：

$$\begin{aligned} \left| \int_{2003}^{2004} \sin t^2 dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_{2003^2}^{2004^2} \sin w \cdot \frac{1}{\sqrt{w}} dw \right| = \left| \frac{1}{2} \int_{2003^2}^{2004^2} \frac{1}{\sqrt{w}} d\cos w \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{2} \frac{\cos w}{\sqrt{w}} \right|_{2003^2}^{2004^2} + \frac{1}{4} \left| \int_{2003^2}^{2004^2} \frac{\cos w}{w^{\frac{3}{2}}} dw \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2004} + \frac{1}{2003} \right) + \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{w^{1/2}} \right|_{2003^2}^{2004^2} \\ &= \frac{2004 + 2003}{2 \times 2004 \times 2003} + \frac{1}{2 \times 2004 \times 2003} = \frac{1}{2003}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

五、证明：取 $\mu = \frac{a}{a+b} \in (0, 1)$ ，由连续介质定理知， $\exists c \in (0, 1)$ ，使 $\varphi(c) = \mu$ ，

在区间 $[0, c]$ 与 $[c, 1]$ 上利用拉格朗日中值定理得：

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(c) - \varphi(0)}{c - 0} = \frac{\mu}{c}; \quad \varphi'(\eta) = \frac{\varphi(1) - \varphi(c)}{1 - c} = \frac{1 - \mu}{1 - c}, \quad \text{其中 } 0 < \xi < c, c < \eta < 1;$$

$$\frac{a}{\varphi'(\xi)} + \frac{b}{\varphi'(\eta)} = \frac{ac}{\mu} + \frac{b(1-c)}{1-\mu} = \frac{2\mu + c(1-3\mu)}{\mu(1-\mu)},$$

$$\text{把 } \mu = \frac{a}{a+b} \text{ 代入化简，得 } \frac{a}{\varphi'(\xi)} + \frac{b}{\varphi'(\eta)} = a + b.$$

$$\text{六、解：由已知条件可解得：} \beta \geq \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n > 0.$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x, \text{ 则 } f(1) = (\ln 2)^{-1} - 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+x)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]^2} - 1.$$

由于对任意 $y \geq 0$ ，有 $\ln(1+y) \geq y - \frac{y^2}{2}$ ，则对任意 $x > 1$ ，

$$f'(x) \leq \frac{1}{x(1+x)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right]^2} - 1 = \frac{-2x^2 + x + 1}{(1+x)(2x-1)} < 0.$$

$$\text{所以，我们要求 } \beta \geq \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \right\} = f(1) = (\ln 2)^{-1} - 1.$$

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第1小题)

2. (解答见数学类第一题第2小题)

3. (解答见数学类第一题第3小题)

$$4. \text{ 解: } \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2 + n} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$

根据夹逼性可得: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k} = \frac{3}{2}.$

二、(解答见数学类第二题)

三、解: 设 $P = \frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 所以积分与路径无关, 但 $(0,0)$ 为奇点, 因此取

折线路径, 从 $(-2,0)$ 到 $(-2,1)$, 再到 $(4,1)$, 再到 $(4,0)$, 则有

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^1 \frac{2}{4+y^2} dy + \int_{-2}^4 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^0 \frac{-4}{16+y^2} dy = \pi.$$

四、(解答见数学类第四题)

五、(解答参见数学类第五题)

六、解: 记 P_i 的坐标为 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, \dots$, 则对 $n \geq 5$ 有: $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-3} + x_{n-1});$

$y_n = \frac{1}{2}(y_{n-3} + y_{n-1})$, 因此有: $\frac{1}{2}x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n-4} + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1},$

由递推得: $\frac{1}{2}x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则有 $\frac{1}{2}a + a + a + a = 2$, 得 $a = \frac{4}{7}.$

同理可得, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{3}{7}$, 即 P_0 的坐标为 $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}).$

(经管类)

一、计算题

1. 解: $e^y + xe^y y' + y' + \cos x = 0$, 得 $y' = -\frac{\cos x + e^y}{xe^y + 1}$, 所以 $y'(0) = -2.$

2. (解答见数学类第一题第2小题)

3. (解答见数学类第一题第1小题)

$$4. \text{解: } \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \cdot y dy = -\cos y \Big|_0^1 = 1 - \cos 1.$$

$$\text{二、解: 由 } S = \sum_{n=1}^{\infty} na^n \text{ 得, } aS = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n+1}; \text{ 所以 } (1-a)S = \sum_{n=1}^{\infty} a^n,$$

所以当 $a < 1$ 时, 级数收敛, $S = \frac{a}{(1-a)^2}$; 当 $a \geq 1$ 时, 级数发散.

三、解: 反证法, 假设 $f(x)$ 不止一个零点, 那至少有两个: x_1 和 x_2 , 且在它们之间没有其他零点;

则 $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$; 显然 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 不能为 0, 否则与条件矛盾; 所以 $f'(x_1) \neq 0, f'(x_2) \neq 0$.

由于在 (x_1, x_2) 中没有零点, 所以 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 中必有一正一负, 令 $F(x) = f(x) + f'(x)$, 则 $F(x_1)F(x_2) < 0$, 所以必然存在 ξ , 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$, 与条件矛盾, 所以假设错误, 至多只有一个零点.

四、(解答见数学类第二题)

五、(解答见数学类第四题)

六、(解答参见数学类第五题)

(文科与专科类)

一、计算题

$$1. \text{解: 原式} = \int_1^e \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

2. (解答见经管类第一题第1小题)

3. (解答见数学类第一题第1小题)

4. (解答见经管类第一题第4小题)

二、(解答见经管类第二题)

三、(解答见经管类第三题)

四、(解答见数学类第二题)

$$\text{五、证明: } f(x) = \frac{\ln x}{x^n}, f'(x) = \frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}} = 0, \text{ 则 } x = e^{\frac{1}{n}}, \text{ 且为 } f(x) \text{ 的极大值点,}$$

$$f(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

所以 $x = e^{\frac{1}{n}}$ 为 $f(x)$ 的最大值点, 所以 $f(x) \leq \frac{1}{ne}$, 证毕.

六、(解答见数学类第四题)

2004 年浙江省大学生高等数学(微积分) 竞赛试题评析

(数学类)

一、计算题

$$1. \text{解: 当 } |a| \leq \sqrt{2} \text{ 时, } 2 \leq \sqrt[n]{2^n + a^{2n}} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 由夹逼性得: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}} = 2$.

当 $|a| > \sqrt{2}$ 时, $a^2 \leq \sqrt[n]{2^n + a^{2n}} \leq \sqrt[n]{a^{2n} + a^{2n}} = a^2 \cdot \sqrt[n]{2}$, 所以, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}} = a^2$.

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}} = \max\{2, a^2\}$.

2. 解: 作变换 $x - \frac{\pi}{2} = t$, 得:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi + \sin t}{t^2 + 2004 - \frac{\pi^2}{4}} dt \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^2 + a^2} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2 + a^2} dt, \quad \left(\text{其中 } a = \sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

因为 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t^2 + a^2} dt = 0$, 而 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{2}{a} \arctan \frac{\pi}{2a}$.

$$\text{所以 } \int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} dx = \frac{2\pi}{a} \arctan \frac{\pi}{2a} = \frac{2\pi}{\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}} \arctan \frac{\pi}{2\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}}.$$

3. 解: 令 $\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 8y + 15 = 0 \end{cases}$, 得驻点 $(0, -\frac{15}{8})$ 不在 Ω 上, 所以最大、最小值必在 Ω 的边界 $4x^2 + y^2 = 1$ 上.

作拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 15y + \lambda(4x^2 + y^2 - 1),$$

$$\text{由 } \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \text{ 得: } \begin{cases} 2x + 8\lambda x = 0 \\ 8y + 15 + 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases},$$

所以最大、最小值分别为 $f(0, 1) = 19$, $f(0, -1) = -11$.

(也可将方程 $4x^2 + y^2 = 1$ 代入 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 15y$ 中化成一元函数求最大、最小值)

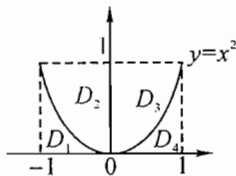
4. 解: 将 D 分为四部分 D_1, D_2, D_3, D_4 , 如图所示.

$$\begin{aligned} \iint_D \max(xy, x^3) d\sigma &= \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} x^3 d\sigma + \iint_{D_3} xy d\sigma + \iint_{D_4} x^3 d\sigma \\ &\triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

$$\text{而 } I_1 = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} xy dy = -\frac{1}{12}, \quad I_2 = \int_{-1}^0 dx \int_{x^2}^1 x^3 dy = -\frac{1}{12},$$

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xy dy = \frac{1}{6}, \quad I_4 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^3 dy = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{所以, } \iint_D \max(xy, x^3) d\sigma = \frac{1}{6}.$$



二、解: $f'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$, $(x^2+1)f'(x) = -1$. 两边对 x 求 $n-1$ 阶导数, 由莱布尼兹公式得

$$(x^2+1)f^{(n)}(x) + 2(n-1)xf^{(n-1)}(x) + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} f^{(n-2)}(x) = 0.$$

令 $x = 0$ 得: $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$, 又因为 $f''(0) = 0, f'(0) = -1$,

所以, $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$

三、解: 方程两边对 x 求导得: $\frac{2x}{4} + \frac{2y \cdot y'}{9} = 0$,

$y' = -\frac{9x}{4y}, k_A = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$, 所以切线方程为 $y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}(x-1)$. 所以 B 点坐

标为: $(0, 2\sqrt{3})$. 取 C 点 $(0, \frac{3\sqrt{3}}{2})$, 连结 CA (如图), 有: $\int = \oint_{\substack{t+\overline{BC}+\overline{CA}}} - \int_{\overline{BC}} - \int_{\overline{CA}}$, 由格

林公式得

$$\oint_{t+\overline{BC}+\overline{CA}} = \iint_D \left[\frac{\cos y}{x+1} + 2\sqrt{3} - \frac{\cos y}{x+1} + \sqrt{3} \right] d\sigma = \iint_D 3\sqrt{3} d\sigma = 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4},$$

$$\int_{\overline{BC}} = \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} (-\sqrt{3}) dy = \frac{3}{2}, \int_{\overline{CA}} = \int_0^1 \left[\frac{\sin \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x+1} - \sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] dx = \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ln 2 - \frac{9}{2},$$

所以所求的积分

$$\int = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ln 2 + \frac{9}{2} = \frac{21}{4} - \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ln 2.$$

四、证明: 作函数 $\varphi(t) = f(t) - t^2 + 1 - \frac{t^2(t-1)}{x^2(x-1)}[f(x) + 1 - x^2], x \in (0, 1)$.

则有: $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(x) = 0$. 所以至少存在两点 $\xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$ 使 $\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2) = 0$, 又 $\varphi'(0) = 0$,

因此至少存在两点 $\eta_1 \in (0, \xi_1), \eta_2 \in (\xi_1, \xi_2)$ 使 $\varphi''(\eta_1) = \varphi''(\eta_2) = 0$.

即有至少存在一点 $\xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (0, 1)$ 使 $\varphi'''(\xi) = 0$.

而 $\varphi'''(t) = f'''(t) - \frac{3!}{x^2(x-1)}[f(x) + 1 - x^2]$, 从而得证.

五、证明: 由柯西—许瓦兹不等式可得

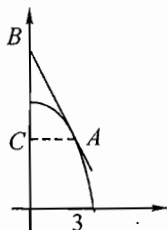
$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2} dx \right)^2 &= \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}} \cdot \frac{f(x)}{\sqrt{t^2+x^2}} \right) dx \right]^2 \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{t^2+x^2} \cdot \int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2} dx = \frac{1}{t} \arctan \frac{1}{t} \cdot \int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2} dx \leq \frac{\pi}{2t} \int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2} dx. \end{aligned}$$

六、解: 根据斯特林公式可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \right)^a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a (2\pi n^{\frac{1}{2n}} e^{-1+\frac{\theta_n}{12n}})^a} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a (4\pi e^{-1})^a}, \text{ 其中 } 0 < \theta_n < 1.$$

所以, 当 $\alpha > 1$ 时, 原级数收敛.

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^a}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{(n^n)^a}} = \frac{1}{n^a}$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 发散, 所以原级数发散.



(工科类)

一、计算题

$$1. \text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1 - x}{x^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\cos x - \sin x) - 1}{3x^2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x \sin x}{6x} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. (解答见数学类第一题第2小题)

3. 解: 令 $\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 8y + 15 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, -\frac{15}{8})$ 不在 Ω 上, 所以最大、最小值必在 Ω 的边界 $4x^2 + y^2 = 1$ 上.

作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 + 15y + \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 2x + 8\lambda x = 0 \\ 8y + 15 + 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}, \text{ 所以最大、最小值分别为 } f(0, 1) = 19,$$

$$f(0, -1) = -11.$$

(也可将方程 $4x^2 + y^2 = 1$ 代入 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 15y$ 中化成一元函数求最大、最小值)

4. (解答见数学类第一题第4小题)

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见数学类第三题)

四、证明: 用反证法. 假设有一点 $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$. 由 $f(x)$ 的连续性知, 存在 $\delta > 0$. 使对 $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ 有 $f(x) > 0$. 并设 $f(x)$ 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 的最小值为 $m > 0$, 则 $\int_a^b |f(x)| dx \geq \int_a^b m dx = m(b-a) > 0$.

与 $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ 矛盾, 所以 $f(x) \equiv 0, x \in (a, b)$.

若 $f(a) \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使对 $\forall x \in [a, a + \delta]$, $|f(x)| \geq m > 0$.

若 $f(b) \neq 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 使对 $\forall x \in [b - \delta, b]$, $|f(x)| \geq m > 0$.

以下同理.

总之, $f(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

五、(解答见数学类第六题)

六、(解答见数学类第五题)

(经管类)

一、计算题

1. 解: 由条件知, $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax - b = \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

$$\text{有: } a = \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - b}{x}, \text{ 取极限得: } a = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} \right] = 1,$$

所以 $b = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x - a(x)$, 取极限得

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{3},$$

因此, $a = 1, b = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ 解: } \int \frac{\cos x}{\sin x(\sin x + \cos x)} dx &= \frac{(\cos x + \sin x) - \sin x}{\sin x(\sin x + \cos x)} dx = \int \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin x + \cos x} \right] dx \\ &= \int \csc x dx - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \ln |\csc x - \cot x| - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

(其中 C 为任意常数)

$$3. \text{ 解: 当 } k \leq 0 \text{ 时, } \int_0^1 x^2 |x - k| dx = \int_0^1 x^2 (x - k) dx = \frac{1}{4} - \frac{k}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 < k < 1 \text{ 时, } \int_0^1 x^2 |x - k| dx &= \int_0^k x^2 (k - x) dx + \int_k^1 x^2 (x - k) dx \\ &= \frac{k^4}{12} + \frac{1}{4} - \frac{k}{3} + \frac{k^4}{12} = \frac{1}{4} - \frac{k}{3} + \frac{k^4}{6}; \end{aligned}$$

$$\text{当 } k \geq 1 \text{ 时, } \int_0^1 x^2 |x - k| dx = \int_0^1 x^2 (k - x) dx = \frac{k}{3} - \frac{1}{4}.$$

$$4. \text{ 解: 作幂级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n+1)!}, \text{ 其收敛区间为 } (-\infty, +\infty).$$

设其和函数为 $s(x)$, 即 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$, 逐项积分得

$$2 \int_0^x s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \neq 0.$$

$$\text{所以 } \int_0^x s(x) dx = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2x} (\sin x - x),$$

$$\text{两边求导得: } s(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2}, \text{ 所以, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = s(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2}.$$

二、(解答见数学类第二题)

$$3. \text{ 解: 方程两边对 } x \text{ 求导得, } 3x^2 - 3y^2 - 6xy \cdot y' + 6y^2 \cdot y' = 0.$$

令 $y' = f'(x) = 0$, 得 $y^2 = x^2$, 即 $y = \pm x$, 而 $y = x$ 不满足方程,

所以, 将 $y = -x$ 代入方程, 设 $y = f(x)$ 的驻点为 $(-2, 2)$, $y' = \frac{y+x}{y}$,

$$\text{设 } y'' = f''(x) = \frac{(y' + 1)y - y'(y + x)}{y^2}, \text{ 将 } x = -2, y = 2 \text{ 代入得}$$

$$f''(-2) = \frac{1}{2} > 0, \text{ 所以, } f(-2) = 2 \text{ 为 } y = f(x) \text{ 的极小值.}$$

四、证明: 设 $f(x) = x^2 - (1+x) \ln^2(1+x)$, 有 $f(0) = 0$.

$$\begin{cases} f'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x), \text{ 又有 } f'(0) = 0, \\ f''(x) = \frac{2}{1+x}[x - \ln(1+x)]. \end{cases}$$

易知 $\ln(1+x) < x, x > 0$, 所以 $f''(x) > 0, f'(x)$ 单调增加,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, 从而知 $f(x)$ 单调增加,

因此当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

五、(解答见数学类第六题)

六、(解答见数学类第四题)

(文科与专科类)

一、计算题

1. (解答见工科类第一题第 1 小题)

2. (解答见经管类第一题第 2 小题)

3. 解: 作变换 $\arccos x = t, x = \cos t, dx = -\sin t dt$, 得:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sin t} (-\sin t) dt = \int_0^{\pi} \cos nt \cos mt dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(n+m)t + \cos(n-m)t] dt = \begin{cases} \pi, & \text{当 } n = m = 0 \text{ 时;} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n = m \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } n \neq m \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$4. \text{ 解: } y' = (e^{x \ln(1+\frac{1}{x})})' = (1 + \frac{1}{x})^x \left[\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} \right],$$

所以所求切线的斜率为 $k = 2(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

当 $x = 1$ 时, $y = 2$, 因此所求切线方程为: $y - 2 = 2(\ln 2 - \frac{1}{2})(x - 1)$.

即: $2(\ln 2 - \frac{1}{2})x - y - 2\ln 2 + 3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{二、解: } f(x) &= \int_{-1}^x (x-t)g(t)dt + \int_x^1 (t-x)g(t)dt \\ &= x \int_{-1}^x g(t)dt - \int_{-1}^x tg(t)dt + \int_x^1 tg(t)dt - x \int_x^1 g(t)dt, x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

$$f'(x) = \int_{-1}^x g(t)dt + xg(x) - xg(x) - xg(x) - \int_x^1 g(t)dt + xg(x) = \int_{-1}^x g(t)dt - \int_x^1 g(t)dt,$$

$$f''(x) = g(x) + g(x) = 2g(x) > 0.$$

因此, 在 $[-1, 1]$ 上, $y = f(x)$ 向上凹.

三、解: 由 $\begin{cases} y = x(2-x) \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ 得交点为 $A(1, 1)$ 和 $B(3, -3)$, 因此,

所求平面图形面积为:

$$S = \int_1^3 [x(2-x) - (3-2x)]dx = \frac{4}{3};$$

所求旋转体体积为:

$$V = \int_1^3 2\pi(x-1) \cdot [x(2-x) - (3-2x)]dx = \frac{8\pi}{3}.$$

四、(解答见经管类第四题)

五、解: 设 $f(x) = x^3 - 3kx^2 + 1$, 有 $f(0) = 1$. 又因为 $f'(x) = 3x^2 - 6kx = 3x(x - 2k)$.

(1) 当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加, 所以方程 $x^3 - 3kx^2 + 1 = 0$, 在 $(0, +\infty)$ 上无根.

(2) 当 $k > 0$ 时, $0 < x < 2k$: $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少; $x > 2k$: $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加.

因此 $x = 2k$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 也是 $(0, +\infty)$ 上的最小值点. $f(2k) = 1 - 4k^3$.

于是有: 当 $1 - 4k^3 > 0$, 即 $0 < k < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 时, 原方程在 $(0, +\infty)$ 上无根;

当 $1 - 4k^3 = 0$, 即 $k = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 时, 原方程在 $(0, +\infty)$ 上有一个根;

当 $1 - 4k^3 < 0$, 即 $k > \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 时, 原方程在 $(0, +\infty)$ 上有两个根.

六、证明: 由 $f(x)$ 在 $x = 2$ 的泰勒公式 $f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-2)^2$ 得:

$$f(1) = f(2) + f'(2) \cdot (-1) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(-1)^2, 1 < \xi_1 < 2,$$

$$f(3) = f(2) + f'(2) + \frac{f''(\xi_2)}{2}, 2 < \xi_2 < 3,$$

$$\text{两式相加得: } f(1) + f(3) = 2f(2) + \frac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)].$$

因为 $f''(x)$ 在 $[1, 3]$ 上连续, 必可取到最大、最小值 M, m .

$$\text{而 } m \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq M.$$

因此由连续函数的价值性知至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$ 使 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$.

代入上式得: $f''(\xi) = f(1) - 2f(2) + f(3)$.

2005 年浙江省大学生高等数学(微积分) 竞赛试题评析 (数学类)

一、计算题

1. 解: 当 $x \rightarrow 0$, $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \ln(1+t) dt - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}}{(x - \sin x)(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln(1+x) - x^2 + \frac{x^3}{2}}{\frac{5}{6}x^4}.$$

因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

$$\text{所以 } \sin x \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^3}{2}}{\frac{5}{6}x^4} = -\frac{1}{5}.$$

$$2. \text{ 解: 设 } I = \int \frac{\sin x}{3\cos x + 4\sin x} dx, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \int \frac{-3\sin x + 4\cos x}{3\cos x + 4\sin x} dx + \frac{4}{3} \int \frac{\cos x}{3\cos x + 4\sin x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln |3\cos x + 4\sin x| + \frac{4}{9} \int \left(1 - \frac{4\sin x}{3\cos x + 4\sin x}\right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln |3\cos x + 4\sin x| + \frac{4}{9}x - \frac{16}{9}I, \end{aligned}$$

$$\text{故 } I = -\frac{3}{25} \ln |3\cos x + 4\sin x| + \frac{4}{25}x + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ 解: 令 } \tan x = t, \text{ 则原积分} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})} + \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})} - \int_{+\infty}^1 \frac{t^{2005}}{(1+t^2)(1+t^{2005})} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$4. \text{ 解: } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} (1 - \cos x) = 0,$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

$$\text{由于 } f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2),$$

$$\text{而 } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)}{x^2} \frac{x^2}{1 - \cos x} = f''(0),$$

$$\text{故 } f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1.$$

$$5. \text{ 解: } \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + g', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -f'_1 + f'_2 + kg',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{11} + 2f''_{12} + f''_{22} + g'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{11} - 2f''_{12} + f''_{22} + k^2 g'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -f''_{11} + f''_{22} + kg'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f''_{22} + (1+2k+k^2)g'',$$

$$\text{又因为 } g'' \neq 0, \quad \text{所以 } 1+2k+k^2 = 0, \quad k = -1.$$

二、解: 在点 (r, φ, θ) 处的泥土质量为 $e^{r^2/R^2} dV$. 与水平面距离为 $r \cos \varphi$, 要做功为 $gr \cos \varphi e^{r^2/R^2} dV$, 所以挖池塘所需做功为

$$\begin{aligned} W &= \iiint_{\Omega} g r \cos \varphi e^{r^2/R^2} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R g r \cos \varphi e^{r^2/R^2} r^2 \sin \varphi dr = \pi g \int_0^R r^3 e^{r^2/R^2} dr \\ &= \pi g \frac{R^2}{2} r^2 e^{r^2/R^2} \Big|_0^R - \frac{\pi g R^2}{2} \int_0^R e^{r^2/R^2} dr^2 = \frac{\pi g R^1}{2}. \end{aligned}$$

三、解：当取 $n = k^2, k^2 + 1, \dots, k^2 + 2k$ 时, $[\sqrt{n}] = k$.

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j}$ 是交错级数, 且 $\sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j} < \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$

而当 $0 \leq j < k$ 时, $(k^2 + j)(k^2 + 2k - j) < (k^2 + k)^2$,

$$\frac{1}{k^2 + j} + \frac{1}{k^2 + 2k - j} > \frac{2}{k^2 + k}, \quad \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j} > \frac{2k+1}{k^2 + k} = \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k^2 + k},$$

$$\sum_{j=0}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + j} < \frac{2k+3}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2},$$

$$\sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j} > \sum_{j=0}^{2k+2} \frac{1}{(k+1)^2 + j}, \quad \text{所以 } \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j} \text{ 单调下降,}$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j}$ 收敛, 记 $u_k = \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j}$, 则由原级数部分和与 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ 部分和之间的关

系易知, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$ 收敛.

四、证明:

$$|x - \sin^2 x - f(x)| + |\cos^2 x - f(x)| \geq |\cos^2 x - f(x) + \sin^2 x - x + f(x)| = |1 - x|,$$

$$\int_{-1}^1 |-\sin^2 x + x - f(x)| dx + \int_{-1}^1 |\cos^2 x - f(x)| dx \geq \int_{-1}^1 |1 - x| dx = \int_{-1}^1 (1 - x) dx = 2,$$

$$\max \left\{ \int_{-1}^1 |-\sin^2 x + x - f(x)| dx, \int_{-1}^1 |\cos^2 x - f(x)| dx \right\} \geq 1,$$

五、解: (1) $f(x)$ 在 $x > 0$ 时单调上升, 若存在要求的区间 $[a, b]$, 只需 $f(x) = x$ 有两正根, 而 $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3} = x$ 的根为 1 和 2, 故存在区间 $[1, 2]$.

(2) $f(x)$ 在 $x > 0$ 时单调下降, 若存在要求的区间 $[a, b]$, 只需满足 $\frac{1}{a} = b$, 因此区间 $\left[a, \frac{1}{a}\right] (0 < a < 1)$ 或 $\left[\frac{1}{a}, a\right] (a > 1)$ 皆满足要求.

(3) $f(x)$ 在 $x > 0$ 时单调上升, 则可求 $f(x) = x$ 的两正根, 而 $1 - \frac{1}{x} = x$ 没有实根, 因此没有所求区间.

六、证明: 由泰勒公式可得

$$xf(x) = xf(x) \Big|_{x=0} + (xf(x))' \Big|_{x=0} x + (xf(x))'' \Big|_{x=\eta} \frac{x^2}{2} = f(0)x + \frac{\eta f''(\eta) + 2f'(\eta)}{2} x^2,$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 [\eta f''(\eta) + 2f'(\eta)] \frac{x^2}{2} dx, \text{ 由积分中值定理得}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = (\xi f''(\xi) + 2f'(\xi)) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3} (\xi f''(\xi) + 2f'(\xi)). \text{ 即为所证.}$$

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第1小题)

2. (解答见数学类第一题第2小题)

3. 解: 当 $x \leq \sqrt{2}$ 时, 原积分 $= \int_0^x t^4 dt = \frac{1}{5} x^5$;

当 $x > \sqrt{2}$ 时, 原积分 $= \int_0^{\sqrt{2}} t^4 dt + \int_{\sqrt{2}}^x 4 dt = \frac{4}{5} \sqrt{2} + 4(x - \sqrt{2}) = 4x - \frac{16}{5} \sqrt{2}$.

$$\text{故原积分} = \begin{cases} \frac{1}{5} x^5, & x \leq \sqrt{2}; \\ 4x - \frac{16}{5} \sqrt{2}, & x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

4. (解答见数学类第一题第4小题)

5. (解答见数学类第一题第5小题)

二、解: 由于被积函数只有一奇点 $(0, 0)$, 故由形变原理 ($x = \cos \theta, y = \sin \theta$) 得

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \oint_{x^2+y^2=1} \frac{y dx - x dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \int_0^{2\pi} -\frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta} \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + 2\sin^2(\theta - \frac{\pi}{4})} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = -2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \stackrel{\text{令 } \tan \theta = t}{=} -2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + 2t^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

三、(解答见数学类第二题)

四、证明: (1) 令 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$, 则 $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad f(0) = 0,$$

因此 $f(x)$ 严格单调增加, $f(x) > f(0) = 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

(2) 令 $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7$, $g(0) = 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sec^2 x - 1 - x^2 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^6 \\ &= \tan^2 x - x^2 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^6 > \left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^6 = 0, \end{aligned}$$

因此, $g(x)$ 严格单调增加, $g(x) > g(0) = 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

五、(解答见数学类第三题)

六、(解答见数学类第五题)

(经管类)

一、计算题

1. 解: 令 $x = \frac{1}{n}$, 则原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x + 5^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{2^x + 3^x + 5^x}{3}}$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{2^x + 3^x + 5^x}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5}{2^x + 3^x + 5^x} = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ln 5}{3} = \frac{1}{3} \ln 30$,

原极限 $= e^{\frac{1}{3} \ln 30} = \sqrt[3]{30}$.

2. (解答见数学类第一题第 2 小题)

3. (解答见工科类第一题第 3 小题)

4. 解: $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$, $x \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$,

$\sqrt{1+x^2} - x \ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - 1 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$,

与 $\frac{x^3}{8}$ 为等价无穷小, 故 $A = \frac{1}{8}, B = 3$.

5. 解: $f(x)$ 在 $x < 0$ 时单调下降, $x > 5$ 时单调上升.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x + 1 - x + 3 - x + 5 - x = 9 - 2x \geq 7$,

当 $1 < x \leq 3$ 时, $f(x) = x + x - 1 + 3 - x + 5 - x = 7$,

当 $3 < x \leq 5$ 时, $f(x) = x + x - 1 + x - 3 + 5 - x = 1 + 2x > 7$,

$\therefore \min f(x) = 7$.

二、(解答见数学类第一题第 4 小题)

三、(解答见工科类第四题)

四、解: $A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 - \sin x)^2}{1 + \sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \sin^2 x - 2 \sin x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \pi$,

而 $\frac{\sin^2 x}{x^2 + \cos x} < 1$, 故 $B < \pi$.

又当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $\frac{10(\sin^2 x + 1)}{4x^2 + \pi^2} > \frac{10 \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 x^2 + 1 \right]}{4x^2 + \pi^2} = \frac{10}{\pi^2} > 1$, 故 $C > \pi$.

因此 $B < A < C$.

五、(1) 解: $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(2) 证明: $a_n > 0$, 且 $a_n < a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, $\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)}$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda(n+1)}$ 收敛, 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

六、(解答见数学类第五题)

(文科与专科类)

一、计算题

$$1. \text{解: 原积分} = \int_{-1}^{1/2} (1-2x)dx + \int_{1/2}^1 (2x-1)dx = (x-x^2) \Big|_{-1}^{1/2} + (x^2-x) \Big|_{1/2}^1 = \frac{5}{2}.$$

$$2. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = b, \quad b = 1.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = a, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

$$3. \text{解: 令 } x = \frac{1}{n}, \text{ 则原极限} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{2^x + 3^x}{2}},$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \frac{2^x + 3^x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2 \cdot 2^x + \ln 3 \cdot 3^x}{2^x + 3^x} = \frac{1}{2} \ln 6,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n = e^{\frac{1}{2} \ln 6} = \sqrt{6}.$$

4. (解答见数学类第一题第2小题)

5. 解: 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调下降; 当 $x \geq 3$ 时, $f(x)$ 单调上升.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x + 1 - x + 3 - x = 4 - x \geq 3$;

当 $1 < x \leq 3$ 时, $f(x) = x + x - 1 + 3 - x = 2 + x > 3$.

因此, $\min f(x) = 3$.

二、(解答见数学类第一题第4小题)

三、证明: 令 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$, $f(0) = 0$,

$$\text{而 } f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

所以 $f(x)$ 严格单调增加, 因此 $f(x) > f(0) = 0$, 得证.

四、(解答见经管类第四题)

五、(1) $\because a_k < \frac{2k+1}{k^2}$, 且 $a_k > 0$, 而 $\frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$, 因此 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

(2) $(k^2 + j)(k^2 + 2k - j) < (k^2 + k)^2, 0 \leq j < k$,

$$\frac{1}{k^2 + j} + \frac{1}{k^2 + 2k - j} > \frac{2}{k^2 + k},$$

$$a_k = \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{k^2 + j} > \frac{2k+1}{k^2 + k} = \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k^2 + k},$$

$$\text{而 } a_{k+1} = \sum_{j=0}^{2k+2} \frac{1}{k^2 + j} < \frac{2k+3}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k^2 + k},$$

因此, $a_k > a_{k+1}$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少.

六、(解答见数学类第五题)

2006 年浙江省大学生高等数学(微积分) 竞赛试题评析 (数学类)

一、计算题

1. 解 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (2k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{2n+1} k^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},\end{aligned}$$

原极限 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^3 + 11n^2 + 3n}{24n^3} = \frac{1}{2}.$

2. 解: $\frac{1+x^4+x^8}{x(1-x^8)} = \frac{1}{x} + \frac{2x^7}{1-x^8} + \frac{x^3}{1-x^8},$ 而 $\frac{x^3}{1-x^8} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{1-x^4} + \frac{x^3}{1+x^4} \right],$

原积分 $= \int \left[\frac{1}{x} + \frac{2x^7}{1-x^8} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1-x^4} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{1+x^4} \right] dx$
 $= \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|1-x^8| + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+x^4}{1-x^4} \right| + C.$

3. 解: 原积分 $= \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x} dx - \int_0^1 dy \int_y^1 e^{y^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{x^2}}{x} dy - \int_0^1 e^{y^2} (1-y) dy$
 $= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} (1-y) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{2} (e-1).$

4. 解: 曲面上过一点的切平面的法向为 $(-1, -3(y-z)^2, 1+3(y-z)^2),$

与这些方向垂直的方向为 $(1, 1, 1).$

因此所求平面方程为 $(x-1) + (y-2) + (z-3) = 0,$ 即 $x+y+z-6=0.$

二、解: $e^x - \frac{x^3}{6} = 0$ 没有实根.

当 $x \leq 0$ 时, $e^x - \frac{x^3}{6} > 0;$ 当 $x > 0$ 时, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^3}{3!},$ 因此方程没有实根.

三、解: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)^3 = \left(\frac{x}{1-x} \right)^3 = \left(\frac{1}{1-x} \right)^3 x^3,$

而 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n,$

因此 x^{20} 的系数为 $\frac{19 \times 18}{2} = 171.$

四、解: 由于曲线 C 方程中的变量 x, y, z 具有轮换对称性, 故有

$$\begin{aligned}\int_C xy ds &= \int_C xz ds = \int_C yz ds = \frac{1}{3} \int_C (xy + xz + yz) ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C [(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds = -\frac{1}{6} R^2 \cdot 2\pi R.\end{aligned}$$

即原积分 $= -\frac{\pi}{3}R^3$.

五、(1) 证明: 由条件知, $x - f(x) \geq 0$,

若 $\exists x_0$, 使 $x_0 - f(x_0) = 2d > 0$, 则 $f(x)$ 连续, $\exists \varepsilon > 0$,

当 $|x - x_0| < \varepsilon$ 时, $x - f(x) > d$, 即 $f(x) < x - d$.

则 $\sup_{t \leq x_0} f(t) = \max \left\{ \sup_{t \leq x_0 - \varepsilon} f(t), \sup_{t \in (x_0 - \varepsilon, x_0)} f(t) \right\} \leq \max \{x_0 - \varepsilon, x_0 - d\}$, 与 $\sup_{t \leq x_0} f(t) = x_0$ 矛盾.

(2) 取 $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数;} \\ x-1, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 则 f 处处不连续, 且 $\sup_{t \leq x} f(t) = x$.

六、解: $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$,

另一方面, 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则 $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \rightarrow 2 (n \rightarrow \infty)$,

因此最小的实数 $c = 2$.

(工科类)

一、计算题

1. 解: 先考虑极限 $\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y - e^x \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+tx)^{\frac{1}{t}} - e^x}{t} \quad \left(\text{设 } t = \frac{1}{y}\right)$,

由洛比塔法则, 上述极限 $= \lim_{t \rightarrow 0} (1+tx)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{\frac{tx}{1+tx} - \ln(1+tx)}{t^2}$,

而 $\frac{tx}{1+tx} = tx - (tx)^2 + o(t^2)$, $\ln(1+tx) = tx - \frac{(tx)^2}{2} + o(t^2)$,

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{tx}{1+tx} - \ln(1+tx)}{t^2} = -\frac{x^2}{2}$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y - e^x \right] = e^x \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)$,

因此原极限 $= -\frac{x^2}{2}e^x$.

2. (解答见数学类第一题第 2 小题)

3. (解答见数学类第一题第 3 小题)

4. (解答见数学类第一题第 4 小题)

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见数学类第三题)

四、(解答见数学类第四题)

五、证明: 必要性: $\forall x, \left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq |\sin x|$.

当 $x \neq 0$ 时, $\left| \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sin kx}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sin kx}{\sin x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right|$,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k k \right| \leq 1, \text{ 即 } \sum_{k=1}^n k a_k \leq 1.$$

充分性: 可证 $|\sin kx| \leq k |\sin x|$.

当 $k=2$ 时, $|\sin 2x| = |2\sin x \cos x| \leq 2 |\sin x|$,

设 $k=n$ 时, $|\sin nx| \leq n |\sin x|$,

则 $|\sin(n+1)x| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| \leq (n+1)x$.

$$\text{若 } \sum_{k=1}^n k a_k \leq 1, \text{ 则 } \left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=1}^n a_k |\sin kx| \leq \sum_{k=1}^n a_k k |\sin x| \leq |\sin x|.$$

六、(解答见数学类第六题)

(经管类)

一、计算题

1. (解答见工科类第一题第1小题)

2. (解答见数学类第一题第2小题)

$$\begin{aligned} 3. \text{ 解: } \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax &= \frac{x^3 + x^2 + 1 - a^3 x^3}{(x^3 + x^2 + 1)^{2/3} + (x^3 + x^2 + 1)^{1/3} ax + a^2 x^2} \\ &= \frac{(1 - a^3)x + 1 + \frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{2/3} + a\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{1/3} + a^2} \end{aligned}$$

$$\text{由题设知: } a = 1, b = \frac{1}{1 + a + a^2} = \frac{1}{3}.$$

$$4. \text{ 解: } y = \frac{1}{e} \sqrt{x}, y = \ln \sqrt{x} \text{ 的交点为 } (e^2, 1),$$

$$V = \int_0^{e^2} \pi \frac{1}{e^2} x dx - \int_1^{e^2} \pi (\ln \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{2} \pi e^2 - \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见数学类第三题)

四、 $\forall x \geq 0, \exists N > 0$, 使 $x \in [0, N]$, 因为 f_1 连续, 所以 $\exists M > 0$, 当 $t \in [0, N]$ 时, $|f_1(t)| \leq M$,

$$\forall x \in [0, N], |f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_1(t)| dt \leq Mx,$$

$$\text{归纳假设 } |f_k(x)| \leq \frac{Mx^{k-1}}{(k-1)!}, |f_{k+1}(x)| = \left| \int_0^x f_k(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_k(t)| dt \leq \frac{Mx^k}{k!},$$

$$\text{所以 } |f_n(x)| \leq \frac{Mx^{n-1}}{(n-1)!} \text{ 因此有: } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

当 $x \leq 0$ 时, 同理可证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

五、(解答见工科类第五题)

六、(解答见数学类第六题)

(文科与专科类)

一、计算题

1. 解: 原极限 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [2e^{\frac{1}{x}} + x(1 - e^{\frac{1}{x}})] = 2 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^t}{t} = 2 - 1 = 1.$

2. 解: $\frac{\ln(2+x) - \ln(1+x)}{x^2 + 3x + 2} = [\ln(2+x) - \ln(1+x)] \times \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right],$

原积分 $= - \int [\ln(2+x) - \ln(1+x)] d[\ln(2+x) - \ln(1+x)]$
 $= - \frac{1}{2} [\ln(2+x) - \ln(1+x)]^2 + C.$

3. 解: $dx = (2t - 2)dt, (dy) \arctan t + \frac{y}{1+t^2} dt + e^y dy = 0,$

$\frac{dy}{dt} = - \frac{\frac{y}{1+t^2}}{e^y + \arctan t}, \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(1+t^2)(1-t)(e^y + \arctan t)}.$ 当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 2,$

即 $t = 0$ 时, $\frac{dy}{dx} = -e^{-2}.$ 切线方程 $y - 2 = -e^{-2}x.$

4. 解: $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}},$

$f^{(10)}(x) = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \cdots (-\frac{17}{2})}{(x+1)^{19/2}} - \frac{(-\frac{1}{2}) \cdots (-\frac{19}{2})}{(x+1)^{21/2}}$
 $= -(x+1)^{-10} 2^{-10} \left[\sqrt{x+1} \times 17!! + \frac{19!!}{\sqrt{x+1}} \right].$

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见经管类第一题第3小题)

四、解: $y = \frac{1}{e} \sqrt{x}, y = \ln \sqrt{x}$ 的交点为 $(e^2, 1),$

面积 $S = \int_0^{e^2} \frac{1}{e} \sqrt{x} dx - \int_1^{e^2} \ln \sqrt{x} dx = \frac{2}{3e} x^{3/2} \Big|_0^{e^2} - \frac{1}{2} (x \ln x - x) \Big|_1^{e^2} = \frac{1}{6} e^2 - \frac{1}{2}.$

体积 V 的解答见经管类第一题第4小题.

五、证明: $\int_0^x t f''(x-t) dt = -t f'(x-t) \Big|_0^x + \int_0^x f'(x-t) dt$
 $= -x f'(0) - f(x-t) \Big|_0^x = -x f'(0) - f(0) + f(x),$

即 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x t f''(x-t) dt.$

六、证明: 必要性: $\forall x, |a \sin x + b \sin 2x| \leq |\sin x|,$

当 $x \neq k\pi$ 时, $\left| a + b \frac{\sin 2x}{\sin x} \right| \leq 1,$

令 $x \rightarrow 0,$ 得 $|a + 2b| \leq 1,$

令 $x \rightarrow \pi,$ 得 $|a - 2b| \leq 1,$ 所以 $|a| + 2|b| \leq 1.$

充分性: $|a| + 2|b| \leq 1$,

$$|a \sin x + b \sin 2x| \leq |a| |\sin x| + |b| |\sin 2x| \leq |a| |\sin x| + 2|b| |\sin x| \leq |\sin x|.$$

2007 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题评析 (数学类)

一、计算题

1. 解: 原积分 $= \frac{1}{5} \int \frac{x^5}{\sqrt{x^5+1}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{x^5+1-1}{\sqrt{x^5+1}} dx = \frac{2}{15} (x^5+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \sqrt{x^5+1} + C.$

2. 解: 由洛比塔法则知,

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{2} \frac{2x - (1+2x) \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} \right],$$

$$\text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2x - (1+2x) \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} = -1, \text{故原极限} = \frac{e}{2}.$$

3. 解: 当取 p 满足 $a+p = -(b+p)$, 即 $p = -\frac{b+a}{2}$ 时,

$$\text{积分} \int_a^b (x+p)^{2007} e^{(x+p)^2} dx = \int_{a+p}^{b+p} x^{2007} e^{x^2} dx = \int_{-\frac{b+a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x^{2007} e^{x^2} dx = 0.$$

4. 解: 由于条件 $f'(x)$ 单调递增, 且 $f(0) = 0$, 易知 $f'(x) \equiv 0$,

若不然, 不妨设 $\exists x_0, f'(x_0) > 0$, 则当 $x > x_0$ 时,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(x) dx \geq \int_{x_0}^x f'(x_0) dx = (x - x_0) f'(x_0) \rightarrow +\infty, (x \rightarrow +\infty), \text{矛盾, 故 } f'(x) \leq 0.$$

同理可证 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \equiv 0$. 因此, $f(x) \equiv f(0) = 0$.

5. 解: 因为 S 圆柱面关于 y 对称, 且 y 是奇函数, 所以 $\iint_S y dS = 0$, 又由对称性知:

$$\text{原积分} = \iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \frac{1}{2} \iint_S (x^2 + y^2) dS = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\pi \times 2 \times 1 = 8\pi.$$

二、解: $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{2}{3k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} - \frac{3}{3k} \right)$
 $= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} = v_n,$

(1) $\frac{u_{10}}{v_{10}} = 1;$

(2) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln 3.$

三、解: 圆柱面为 $S: \{(x, y, z) \mid x^2 + (y-2)^2 = 4, 0 \leq z \leq 4\pi\}$,

D 点坐标为 $(0, 4, 0)$, E 点坐标可取为 $(2, 2, 0)$,

(1) C 点坐标为 $(0, 4, 4\pi)$, 过 C, E 两点的直线方程为 $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4\pi},$

故旋转曲面方程为 $x^2 + y^2 = 8 + \frac{1}{2\pi^2} z^2$.

(2) 旋转曲面在垂直于 z 轴方向的截面是一个半径为 $\sqrt{8 + \frac{1}{2\pi^2} z^2}$ 的圆, 所以所求体积 V 为:

$$V = \int_0^{4\pi} \pi \left(8 + \frac{1}{2\pi^2} z^2 \right) dz = 32\pi^2 + \frac{32}{3}\pi.$$

四、解: $f(x, y, z)$ 在 D 的最大、最小值, 即为 $g(x, y, z) = x^2 + yz$ 在

$D' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 的最大、最小值,

$$x^2 + yz \leq x^2 + \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \leq 1, \text{ 而 } g(1, 0, 0) = 1, \text{ 即最大值为 } 1.$$

$$x^2 + yz \geq x^2 - \frac{y^2 + z^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}, \text{ 而 } g(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}, \text{ 即最小值为 } -\frac{1}{2}.$$

注: 此题也可用多元函数求极值的方法求得.

五、解: $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, (n+1-k)(C_n^k)^{-1} = (nC_{n-1}^k)^{-1}, k < n$ 时,

$$\text{因此, } \sum_{k=1}^n (n+1-k)[nC_n^k]^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} n^{-2}[nC_{n-1}^k]^{-1} + \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n-1} n^{-2} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n},$$

原极限 = 0.

六、证明: 要证 $\cos\sqrt{2}x \leq -x^2 + \sqrt{1+x^4}$, 即证 $f(x) \triangleq \cos\sqrt{2}x(x^2 + \sqrt{1+x^4}) \leq 1$,

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \text{ 只需证 } f'(x) = -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + \cos\sqrt{2}x\left(2x + \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}\right) \\ &= (-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x \cdot \sqrt{1+x^4} + 2x\cos\sqrt{2}x) \cdot \frac{x^2 + \sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}} < 0. \end{aligned}$$

设 $g(x) = -\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\sqrt{1+x^4} + 2x\cos\sqrt{2}x, g(0) = 0$,

$$\text{且 } g'(x) = -2\cos\sqrt{2}x(\sqrt{1+x^4} - 1) - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} - 2\sqrt{2}x\sin\sqrt{2}x < 0.$$

因此, 当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4})$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0, f(x) < 1$ 得证.

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)

2. (解答见数学类第一题第 2 小题)

3. (解答见数学类第一题第 3 小题)

$$\begin{aligned} 4. \text{ 解: 原积分} &= \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} e^{b^2x^2} dy + \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}x}^b e^{a^2y^2} dy \\ &= \int_0^a \frac{b}{a} x e^{b^2x^2} dx + \int_0^b dy \int_0^{\frac{a}{b}y} e^{a^2y^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2ab}(e^{a^2b^2} - 1) + \frac{1}{2ab}(e^{a^2b^2} - 1) = \frac{1}{ab}(e^{a^2b^2} - 1).$$

5. (解答见数学类第一题第 5 小题)

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见数学类第三题)

四、(解答见数学类第四题)

$$\begin{aligned} \text{五、解: } S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ 则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) x^{n-1} \\ &= S(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^{n+1} = S(x) + \frac{x}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } S'(x) = S(x) + \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ 且 } S(0) = a_0 = 2,$$

$$\text{解方程 } S(x) = c e^x + \frac{1}{1-x}, \text{ 由 } S(0) = 2 \text{ 得 } c = 1, S(x) = e^x + \frac{1}{1-x}.$$

$$\text{六、证明: (1) 记 } g(x) = \ln f(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, g''(x) = \frac{f f'' - (f')^2}{f^2} > 0,$$

$$\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \geq g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \text{ 即 } f(x_1) f(x_2) \geq f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

$$(2) g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(\xi)}{2} x^2 = \ln f(0) + \frac{f'(0)}{f(0)} x + \frac{f f'' - (f')^2}{2 f^2} \Big|_{x=\xi} x^2 \geq f'(0)x,$$

$$\text{即 } f(x) \geq e^{f'(0)x}.$$

(经管类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)

$$2. \text{ 解: 由洛比塔法则知, 原极限 } = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{2} e.$$

3. (解答见数学类第一题第 3 小题)

$$4. \text{ 解: } dy = e^{-t^4} \cdot \sin(t^2) \cdot 2t, dx = -\sin(t^2) \cdot 2t,$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-t^4}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{4t^3 e^{-t^4}}{-\sin(t^2) \cdot 2t} = -\frac{2t^2 e^{-t^4}}{\sin(t^2)}.$$

$$5. \text{ 解: 记原积分为 } I, \text{ 则 } I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \xrightarrow{\text{含 } t = \frac{1}{x}} \int_0^{+\infty} \frac{t^a dt}{(1+t^2)(1+t^a)},$$

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, I = \frac{\pi}{4}.$$

二、(解答见数学类第二题)

三、(解答见数学类第三题)

$$\text{四、解: 由条件 } \forall x, e^x f(x) + 2e^{\pi-x} f(\pi-x) = 3 \sin x,$$

$$\text{故有 } e^{\pi-x} f(\pi-x) + 2e^x f(x) = 3 \sin x,$$

解方程得 $e^x f(x) = \sin x, f(x) = e^{-x} \sin x,$

$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, 含 $f'(x) = 0$ 得可能极值点 $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, k$ 为整数,

$f''(x) = -2 \cos x e^{-x}$, 因此, 当 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极大值 $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)} \frac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ 时有极小值 $-e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi+\pi)} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

五、(解答见工科类第五题)

六、证明: 令 $t = \pi - x$, 则 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 要证不等式为 $\sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}} < \frac{\ln(1+\sin t)}{t}$, 即要证

$\frac{t \cos t}{1+\sin t} < \ln(1+\sin t)$, 而 $\int_0^t \frac{\cos t}{1+\sin t} dt = \ln(1+\sin t)$, 且 $(\frac{\cos t}{1+\sin t})' = \frac{-1}{1+\sin t} < 0$, $\frac{\cos t}{1+\sin t}$ 单调减少.

所以, $\ln(1+\sin t) = \int_0^t \frac{\cos x}{1+\sin x} dx > \int_0^t \frac{\cos t}{1+\sin t} dx = \frac{t \cos t}{1+\sin t}$, 得证.

(文科与专科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)

2. 解: 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \frac{\sin x^2}{x \ln(1+x)} = 0$.

3. (解答见数学类第一题第 3 小题)

4. (解答见经管类第一题第 4 小题)

5. 解: 因为 $(2x - \sqrt[3]{1-x^3} - ax - b) = x \sqrt[3]{1-x^3} - (a-2)x - b \rightarrow 0$,
当 $x \rightarrow \infty$ 时, 故 $a-2=1$, 即 $a=3$.

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3-1} - x - b) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}} + (x^3-1)^{\frac{1}{3}}x + x^2} - b \right] = 0$, 因此 $b=0$.

二、(解答见经管类第四题)

三、解: $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2x^2 - 4x - 6 + 7x + 6}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{27}{4(x-3)} + \frac{1}{4(x+1)}$,

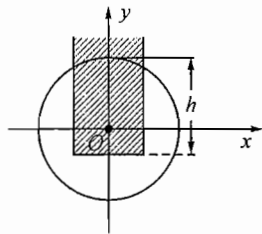
所以 $f'(x) = 1 - \frac{27}{4} \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{27}{4} \frac{2}{(x-3)^3} + \frac{2}{4(x+1)^2}$,

$f^{(n)}(x) = \frac{27}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{4(x+1)^{n+1}}, n \geq 2$.

四、(解答见经管类第六题)

五、取镜头中心为坐标原点, 纸片中线为 y 轴(如图), 则纸片挡住镜头的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [\sqrt{1-x^2} + (h-1)] dx = 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 t dt + \frac{h-1}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + h - 1. \end{aligned}$$



由于 $S = \frac{1}{2}\pi$, 即 $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} + h - 1 = \frac{\pi}{2}$,

得 $h = 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

六、证明: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$, 所以必存在 $\eta \in (0, 1)$, $f'(\eta) < 1$,

又 $f'(x)$ 连续, $f'(1) > 1$, $\exists \xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 1$.

2008 年浙江省大学生高等数学(微积分) 竞赛试题评析 (数学类)

一、计算题

1. 解: 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} - 3}{3} = 2$,

故原极限 $= e^2$.

2. 解: $\cos(3+x)\sin(5+x) = \cos(x+3)[\sin(x+3)\cos 2 + \cos(x+3)\sin 2]$,

原积分 $= \int \frac{\sec^2(x+3)}{\tan(x+3)\cos 2 + \sin 2} dx = \frac{1}{\cos 2} \ln |\tan(x+3) + \tan 2| + C$.

3. 解: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 而 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + 1$, 两边从 0 到 x 积分得

$\arcsin x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} + x$, 即 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} + x^4$,

$f^{(2008)}(0) = \frac{(2003)!!}{2^{1002} 1002! 2005} \cdot 2008!$.

4. 解: $\begin{cases} f_x = 16x^3 - 4x - 2\sqrt{2}y = 0, \\ f_y = 4y^3 - 2y - 2\sqrt{2}x = 0, \end{cases} \quad 16x^3 = 4\sqrt{2}y^3, \quad y = \sqrt{2}x.$

解得 $(0, 0)$, $(\sqrt{2}/2, 1)$, $(-\sqrt{2}/2, -1)$.

f 在 $(0, 0)$ 处 $f(x, -\sqrt{2}x) = 8x^4 > 0$, $f(x, \sqrt{2}x) = 8x^4 - 8x^2 < 0$, $|x| < 1$ 时,

f 在 $(0, 0)$ 处没取到极值, 在 $(\sqrt{2}/2, 1)$ 及 $(-\sqrt{2}/2, -1)$ 处取到极小值 -2 .

5. 解: 由题设 $\iiint_V \rho z dV + \iiint_V z dV = 0$.

而 $\iiint_V \rho z dv = \rho \int_0^1 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z} dx dy = \rho \pi \int_0^1 z(1-z) dz = \frac{\rho \pi}{6}$;

$\iiint_V z dV = \int_{-1}^0 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq (1+z)^2} dx dy = \pi \int_{-1}^0 z(1+z)^2 dz = -\frac{\pi}{12}$.

$\frac{\rho \pi}{6} - \frac{\pi}{12} = 0, \quad \rho = \frac{1}{2}$.

二、解: $\sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right) = \sin\left(\frac{n^3+n-n}{n^2+1}\pi\right) = (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{n^2+1}$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{n\pi}{n^2+1} \sim \frac{\pi}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sin \frac{n^3\pi}{n^2+1} \right|$ 发散. 而由莱泊尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi}{n^2+1}$ 收敛, 所以原级数条件收敛.

三、解: $\iint_D \sin(x-y)^2 dx dy = \oint_{\partial D} -y \sin(x-y)^2 dx + y \sin(x-y)^2 dy$
 $= \int_{-1}^1 y \sin(1-y)^2 dy + \int_1^{-1} y \sin(-1-y)^2 dy + \int_{-1}^1 \sin(x+1)^2 dx - \int_1^{-1} \sin(x-1)^2 dx$
 $= 2 \int_{-1}^1 y \sin(1-y)^2 dy + 2 \int_{-1}^1 \sin(x+1)^2 dx$
 $= 2 \int_{-1}^1 (y-1) \sin(1-y)^2 dy + 4 \int_{-1}^1 \sin(x+1)^2 dx = 4a + \cos 4 - 1.$

四、解: 记曲面 $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截部分为 S , S 在 yOz 平面投影为 σ_{yz} , 在 xOy 平面上投影为 σ_{xy} .

则原积分 = $\iint_{\sigma_{yz}} \frac{z}{a} y^2 dy dz = \iint_S \frac{xz}{2a^2} y^2 dS = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{x}{a} y^2 dx dy$
 $= \frac{1}{a} \int_0^a dr \int_0^{2\pi} (a + r \cos \theta) r^2 \sin^2 \theta r d\theta = \frac{1}{a} \int_0^a ar^3 \pi dr = \frac{\pi}{4} a^4.$

五、证明:

(方法一) 记 $f_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_{2k+1}(x) \rightarrow -\infty$, 且 $f_{2k+1}(0) = 1 > 0$, 而当 $x > 0$ 时, $f_{2k+1}(x)$ 显然没有根, 因此 $f_{2k+1}(x)$ 至少有一零点 $x_1 \in (-\infty, 0)$. 现设 $f_{2k+1}(x)$ 有 m 个根 ($m > 1$) $-\infty < x_m < \cdots < x_1 < 0$,

因为 $f'_{2k+1}(x) + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = f_{2k+1}(x)$, 即 $f'_{2k+1}(x_i) \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots, m$;

故 $f_{2k+1}(x)$ 只有单根, 所以过一根变一次符号, 即 $f_{2k+1}(x)$ 在 x_2 附近单调减少, 而

$f'_{2k+1}(x_2) + \frac{x_2^{2k+1}}{(2k+1)!} = f_{2k+1}(x_2) = 0$, 所以 $f'_{2k+1}(x_2) > 0$,

这与 $f_{2k+1}(x)$ 在 x_2 附近单调减少矛盾, 所以 $f_{2k+1}(x)$ 只有一根.

(方法二) 记 $f_k(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!}$, 则同方法一知 $f_{2k+1}(x)$ 至少有一零点 $x_1 \in (-\infty, 0)$.

现用归纳法: 易知 $f_1(x)$ 只有一根 $x_1 = -1$, 而 $f_2(x) > 0$; 设 $f_{2k-1}(x)$ 只有一根 x_1 , 即 $f_{2k}(x)$ 在 x_1 处取最小值, 且 $f_{2k-1}(x) + \frac{x^{2k}}{(2k)!} = f_{2k}(x)$, $f_{2k}(x_1) > 0, f_{2k}(x) \geq f_{2k}(x_1) > 0, f_{2k+1}(x)$ 单调增加, 所以 $f_{2k+1}(x)$ 只有一根.

六、(1) 证明: 反证法, 若 $a_1 + a_2 \leq 1$, 则当 $y_{n+1} \geq y_{n+2}$ 时,

$y_n = a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} \leq (a_1 + a_2) y_{n+1} \leq y_{n+1}$, 而 $y_{n+1} \leq y_{n+2}$ 时, 可得 $y_n \leq y_{n+2}$,

即 $\{y_n\}$ 中有一子列 $\{y_{n_k}\}$ 是单调递增, 这与 $y_n \rightarrow 0$ 矛盾. 因此 $a_1 + a_2 > 1$.

(2) 取 $y_n = \lambda^n$, 其中 $\lambda = \frac{2}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2a_2}$,

则 $a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} = \lambda^{n+1} \left(\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} + a_1 \right) = \lambda^n = y_n$.

且 $a_1^2 + 4a_2 > a_1^2 + 4(1-a_1) = (2-a_1)^2$, $\lambda < \frac{2}{a_1 + |2-a_1|} \leq 1$, 即 $y_n \rightarrow 0$.

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)
2. (解答见数学类第一题第 2 小题)
3. (解答见数学类第一题第 3 小题)
4. (解答见数学类第一题第 4 小题)
5. (解答见数学类第一题第 5 小题)

二、(1) 证明: $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加,

且 $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$, $f_n\left(\frac{2}{n}\right) > 0$, 所以 f_n 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点 a_n .

(2) 易知, 当 n 充分大时, $\frac{2}{n} > \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^n$, 所以 $f_n\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^n - \frac{2}{n} < 0$,

而 $f_n\left(\frac{2}{n}\right) > 0$, $a_n \in \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}, \frac{2}{n}\right)$, 有 $\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^n < (1+a_n)^n < \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$,

由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_n)^n = e^2$.

三、(解答见数学类第三题)

四、(解答见数学类第四题)

五、证明: 记 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, 则 $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$, $f''(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, 而

$f''(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{2} > 0$, $f'(x)$ 严格单调增加, 可知 $f'(x)$ 有唯一零点 x_0 , 即 $f(x)$ 在 x_0 处取最小值,

而 $f(x_0) = f'(x_0) + \frac{x_0^4}{4!} > 0$, 即 $f(x) > 0$.

六、(解答见数学类第六题)

(经管类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)
2. (解答见数学类第一题第 2 小题)
3. (解答见数学类第一题第 3 小题)

4. 解: $dx = \frac{1}{t} dt$, 对积分 $\int_1^t e^{-(ts)^2} ds$ 作变换 $u = ts$, $ds = \frac{1}{t} du$, $\int_1^t e^{-(ts)^2} ds = \frac{1}{t} \int_t^{t^2} e^{-u^2} du$,

所以 $dy = \left[2 - \frac{1}{t^2} \int_t^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{1}{t} (e^{-t^4} \cdot 2t - e^{-t^2}) \right] dt$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} = 2 + e^{-1}$, 而 $y|_{t=1} = 2$, $x|_{t=1} = 0$,

因此所求切线方程为 $y - 2 = (2 + e^{-1})x$.

$$\begin{aligned} 5. \text{ 解: } V &= \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi x |y| dx = - \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi x^2 \sin x dx = 2\pi x^2 \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} 4\pi x \cos x dx \\ &= 10\pi^3 + \int_{\pi}^{2\pi} 4\pi \sin x dx = 10\pi^3 - 8\pi. \end{aligned}$$

二、(解答见工科类第二题)

三、解: 记 $f(x) = \cos x + x - t$, $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$.

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| = \max\{|f(0)|, |f(2\pi)|\} = \max\{|1-t|, |2\pi+1-t|\} = \begin{cases} t-1, & t > \pi; \\ 2\pi+1-t, & t \leq \pi. \end{cases}$$

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| = \pi, \quad t = \pi + 1.$$

四、(解答见数学类第二题)

五、(解答见工科类第五题)

六、(解答见数学类第六题)

(文科与专科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)

$$2. \text{ 解: 原积分} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^{-2}}} = - \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^{-2}}} d\left(\frac{1}{x}\right) = - \arcsin \frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$3. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ 而 } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + 1,$$

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} + x, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+2006} + x^{2006},$$

$$f^{2008}(0) = \frac{(2008)!}{6}.$$

4. (解答见经管类第一题第 4 小题)

5. (解答见经管类第一题第 5 小题)

$$\text{二、解: 原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{nk}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \sqrt{k/n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \text{ 作变换 } \sqrt{x} = t \text{ 有}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2t}{1+t} dt = 2 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2 - 2 \ln 2.$$

三、证明: 因为 f 可导, 当然连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = f(2)$, 由积分中值定理知 $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得

$f(\eta) = f(2)$, 又由罗尔定理可知, $\exists \xi \in (\eta, 2) \subset (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

四、(解答见工科类第二题)

五、(解答见经管类第三题)

六、(解答见工科类第五题)

2009 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题评析 (数学类)

一、计算题

1. 解: 记 $I_n = \ln \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right),$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 2 \ln 2 - 1,$$

故原极限 $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} I_n} = e^{2 \ln 2 - 1} = 4/e.$

2. 解: 原积分 $= \int \frac{d(x \ln x - x)}{\sqrt{1+x^2(\ln x - 1)^2}} = \ln(x \ln x - x + \sqrt{1+x^2(\ln x - 1)^2}) + C.$

3. 解: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^n x)^{2n}}{2(2n)!},$

所以, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} x^{2n+3}}{2(2n)!}, f^{(2009)}(0) = \frac{(-1)^{1003-1} 2^{2006}}{2(2006)!} (2009)! = \frac{2^{2005} (2009)!}{(2006)!}.$

4. 解: $\frac{\partial z}{\partial x} = g'[f + x f'_1], \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x g''[f'_1 + 2f'_2][f_1 + x f'_1] + g'[f'_1 + 2f'_2 + x(f''_{11} + 2f''_{12})].$

5. 解: $\varphi(x) = \int_0^x dv \int_{-x}^0 f(u+v) du = \int_0^x dv \int_0^x f(v-u) du,$

$$\varphi' = \int_0^x f(x-u) du + \int_0^x f(v-x) dv = \int_0^x f(u) du + \int_{-x}^0 f(v) dv = \int_0^x [f(u) + f(-u)] du.$$

二、解: 显然 $A_k^* \geq [\sqrt{k}]$, 记 $A_k(n) = \{z \mid z = m^n, m \in \mathbb{Z}^+, m \geq 1, 1 \leq z \leq k\}.$

$A_k^*(n) \leq \sqrt[n]{k}, n = 2, 3, \dots, [\log_2 k],$ 且 $A_k([\log_2 k] + 1) = \{1\},$

因此, $A_k = \bigcup_{n=2}^{[\log_2 k]} A_k(n), \sqrt{k} \leq A_k^* \leq \sqrt{k} + (\log_2 k) \sqrt[k]{k}, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k^*}{\sqrt{k}} = 1.$

三、解: (1) S_1 的面积为 $S = \iint_{S_1} dS = \iint_{2(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4} \sqrt{21} dx dy = 2\sqrt{42}\pi,$

$p_0(x_0, y_0, z_0)$ 到 S_1 所在平面的距离为

$$d = \frac{|4x_0 + 2y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{16 + 4 + 1}}, \quad \text{故 } V = \frac{1}{3} dS = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} |4x_0 + 2y_0 + z_0 - 1|.$$

(2) $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi |2(x+1)^2 + (y+1)^2 - 4| \leq 4 \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi,$ 因此, 当 $2(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ 时,

$V_{\max} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi,$ 当 $p_0(-1, -1, 3) \in S_1.$

四、解: 因为在 L 上 $z = x^2 + y^2,$

$$R(x, y, z) = \int_0^{x^2+y^2} f(z-t) dt = - \int_x^{x^2-y^2} f(t) dt = \int_0^z f(t) dt,$$

原积分 $= \oint_L 2xz f(0) dx + [x^3 + 2yz f(0)] dy + \left(\int_0^z f(t) dt \right) dz$

$$\begin{aligned}
 &= \oint_L f(0)(x^2 + y^2)[2xdx + 2ydy] + x^3 dy = \oint_L x^3 dy = \iint_S 3x^2 dxdy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1-y} 3x^2 dxdy = 3 \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \pi.
 \end{aligned}$$

五、(1) 证明: $f_n(0) = -r < 0$, $f'_n(x) = n^{-1}x^{\frac{1}{n}-1} + 1 > 0$, 故 f_n 单调递增, 且 $f_n(r) = \sqrt[n]{r} > 0$, f_n 在 $(0, +\infty)$ 有唯一零点 x_n .

(2) 当 $r < 1$ 时, $f_n(r^n) = \sqrt[n]{r^n} + r^n - r > 0$, 即 $0 < x_n < r^n$, 故此时 $\sum x_n$ 收敛.

当 $r > 1$ 时, 当 n 充分大时, $f_n(n^{-1}) = \sqrt[n]{n^{-1}} + n^{-1} - r < 0$, 故 $x_n > n^{-1}$, 此时 $\sum x_n$ 发散.

当 $r = 1$ 时, 当 $f_n(n^{-1}) = \sqrt[n]{n^{-1}} + n^{-1} - 1 = \frac{1}{n} \left[\frac{1-n}{\sqrt[n]{n^{1-n}} + \sqrt[n]{n^{2-n}} + \dots + 1} + 1 \right] < 0$,

即 $x_n > n^{-1}$, $\sum x_n$ 发散.

综上所述, $r < 1$ 时, $\sum x_n$ 收敛; $r \geq 1$ 时, $\sum x_n$ 发散.

六、证明: 记 $\max\{f(0), f(1)\} = d$,

因为 $f'' > 0$, $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) < f(0)(1-x) + f(1)x \leq d(1-x) + dx = d$,

$$\forall x_0 \in (0, 1), \text{ 考虑折线 } g(x) = \begin{cases} f(0) \frac{x_0 - x}{x_0} + f(x_0) \frac{x}{x_0}, & x \in (0, x_0); \\ f(x_0) \frac{1-x}{1-x_0} + f(1) \frac{x-x_0}{1-x_0}, & x \in [x_0, 1]. \end{cases}$$

$g(x) \geq f(x)$, 故 $\int_0^1 g(x) dx = 0.5f(x_0) + 0.5[f(0)x_0 + f(1)(1-x_0)] > 0$,

$-f(x_0) < f(0)x_0 + f(1)(1-x_0) \leq d$, $|f(x_0)| \leq d$.

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)
2. (解答见数学类第一题第 2 小题)
3. (解答见数学类第一题第 3 小题)
4. (解答见数学类第一题第 4 小题)
5. (解答见数学类第一题第 5 小题)

二、解: 由条件知 $e^x + \frac{ax^2 + bx}{1-x} = 1 + o(x^2)$,

而 $e^x + \frac{ax^2 + bx}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + (ax^2 + bx) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = 1 + (b+1)x + (0.5+a+b)x^2 + o(x^3)$,

因此, $b+1=0$, $0.5+a+b=0$, $b=-1$, $a=0.5$.

三、(解答见数学类第三题)

四、(解答见数学类第四题)

五、(解答见数学类第五题)

六、证明: 因为 $f'(x) \geq f(x)$, 记 $g(x) = e^{-x}f(x)$, 所以 $g'(x) = e^{-x}[f'(x) - f(x)] \geq 0$, $g(x)$ 单

调增加,且 $g(0) = 0, g(x) \geq 0, f(x) \geq 0 (x \geq 0)$.

(经管类)

一、计算题

$$1. \text{解: 原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{\frac{i}{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right) \left(2 + \frac{i}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)(2+x)} = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} \right] dx = \ln \frac{1+x}{2+x} \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

2. (解答见数学类第一题第2小题)

$$3. \text{解: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{-1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n)!}, f^{(2009)}(0) = -\frac{2^{2007}}{(2008)!} (2009)! = -2^{2007} 2009.$$

$$4. \text{解: } \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t}{\sin^2 t} / \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \sin t \cdot \sin 2t + \cos t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dx = (-\sin^2 t)(\cos t \sin 2t + 2\sin t \cos 2t - \sin t).$$

因为 $t \in (0, \pi)$, $\sin t \neq 0$, 所以 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, 2\cos^2 t + 2\cos 2t - 1 = 0, 6\cos^2 t - 3 = 0$,

所以 $\cos t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 经过时改变符号, 故有二个拐点 $(\pm 1, 0)$.

5. (解答见工科类第二题)

二、解: 因为 $f(0) = 0, f'(x) \in (0, 1)$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$. $\therefore f(x) - f(x)f'(x) > 0$.

记 $g(x) = \int_0^x f(x) dx - \frac{1}{2} f^2(x)$, $g'(x) = f(x) - f(x)f'(x) > 0$, $g(0) = 0, g(x) > 0$,

故 $f(x)g(x) = f(x) \int_0^x f(y) dy - \frac{1}{2} f^3(x) > 0, 2 \int_0^1 f(x) dx \int_0^x f(y) dy > \int_0^1 f^3(x) dx$,

即 $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 > \int_0^1 f^3(x) dx$.

三、解: 显然 $g(x)$ 是偶函数, $g(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x-t)e^t dt + \int_x^1 (t-x)e^t dt, & x \in [-1, 1]; \\ \int_{-1}^1 (x-t)e^t dt, & x > 1 \end{cases}$.

$x \in [-1, 1]$, $g'(x) = \int_{-1}^x e^t dt - \int_x^1 e^t dt$, $g''(x) = 2e^{x^2} > 0$, 且 $g'(0) = 0$,

$x > 1$, $g'(x) = \int_{-1}^1 e^t dt > 0$, 故 $\min g(x) = 2 \int_{-1}^1 |t| e^{t^2} dt = \int_0^1 2te^{t^2} dt = e - 1$.

$$4. \text{解: } V_n = \int_0^\pi \pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi e^{-2x} |\sin x| dx = \pi \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx$$

$$= \pi \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\pi e^{-2(x+j\pi)} \sin x dx = \pi \int_0^\pi e^{-2x} \sin x dx \sum_{j=0}^{n-1} e^{-2j\pi} = \pi \frac{1+e^{-2\pi}}{5} \frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \pi \frac{1 + e^{-2\pi}}{5(1 - e^{-2\pi})}.$$

五、(解答见数学类第五题)

六、(解答见工科类第六题)

(文科与专科类)

一、计算题

$$1. \text{解: 原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \frac{1}{n} = \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = -\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi}.$$

$$2. \text{解: 原积分} = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{3/2}}} dx^{3/2} = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x^{3/2}} + c.$$

$$3. \text{解: 记 } g(x) = \left(\tan \frac{\pi x^2}{4} - 2 \right) \cdots \left(\tan \frac{\pi x^{100}}{4} - 100 \right), \quad \text{则 } f(x) = \left(\tan \frac{\pi x}{4} - 1 \right) \cdot g(x).$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi x}{4} \Big|_{x=1} \cdot g(1) = -\frac{\pi \cdot (99)!}{2}.$$

4. (解答见经管类第一题第4小题)

5. (解答见工科类第二题)

二、证明: 因为 $f'(x) \in (0, 1)$, $f(0) = 0$, 所以 $\forall x > 0, f(x) > 0$,

$$\text{要证 } g(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt \geq 0, \text{ 又 } g(0) = 0,$$

$$\text{故只需证 } g'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t) dt - f^3(x) \geq 0, \text{ 即证 } h(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \geq 0,$$

$$\text{而 } h(0) = 0, \text{ 而 } h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geq 0,$$

因此有 $h(x) \geq 0$.

三、(解答见经管类第三题)

$$四、V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dt = \int_0^{2\pi} \pi e^{-2t} |\sin x| dx = \pi(1 + e^{-2\pi}) \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x dx = \frac{\pi(1 + e^{-2\pi})^2}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{五、证明: (1) } F(-t) &= \int_0^{\pi} \ln(1 + 2t \cos x + t^2) dx = \int_{-\pi}^0 \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx = F(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 2F(t) &= F(t) + F(-t) = \int_0^{\pi} \ln[(1 + t^2)^2 - 4t^2 \cos^2 x] dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln[1 + t^4 - 2t^2 \cos 2x] dx = 0.5 \int_0^{2\pi} \ln[1 + t^4 - 2t^2 \cos x] dx \\ &= \int_0^{\pi} \ln[1 - 2t^2 \cos x + t^4] dx = F(t^2). \end{aligned}$$

$$\text{六、证明: 记 } g(x) = 2x - \int_0^x f(t) dt - 1,$$

$$\text{则 } g(0) = -1, \quad g'(x) = 2 - f(x) > 0, \quad \text{且 } g(1) = 2 - \int_0^1 f(t) dt - 1 \geq 0,$$

故 g 在 $[0, 1]$ 有唯一零点, 即 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 有唯一解.

2010 年浙江省大学生高等数学(微积分)竞赛试题解析 (数学类)

一、计算题

1. 解: 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right]^{-2 \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}} \left(-\frac{1}{2} \right) = e^{-0.5}.$

2. 解: 令 $x = t + s, y = t - s,$

$$\text{原积分} = 2 \iint_{R^2} \exp \left[-\frac{(1-\rho)t^2 + (1+\rho)s^2}{(1-\rho^2)} \right] dt ds = 2 \sqrt{1-\rho^2} \iint_{R^2} \exp[-x^2 - y^2] dx dy = 2 \sqrt{1-\rho^2} \pi.$$

3. 解: $x^2 + y^2 \leq 2y$ 落在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内的充分必要条件为 $(0, 1)$ 到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的距离 $d \geq 1$.

而 $d^2 = \min f(t) = \min[a^2 \cos^2 t + (b \sin t - 1)^2], f(t) = a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 t - 2b \sin t + 1$, 要求最小值, 只需讨论 $t \in [0, \pi/2]$, 可得 $b \geq b^2 - a^2$ 时 $f(t)$ 的最小值为: $(b-1)^2$; $b \leq b^2 - a^2$ 时 $f(t)$ 的最小值为: $a^2 - a^2/(b^2 - a^2)$.

充分必要条件为 $b \geq b^2 - a^2$ 时 $b \geq 2$; $b \leq b^2 - a^2$ 时 $a^2 b^2 \geq b^2 + a^4$.

此时椭圆面积 $S = \pi ab$, 取得最小值时必有 $d = 1$.

$b \geq b^2 - a^2$ 时 $b = 2, a \geq \sqrt{2}, S \geq 2\sqrt{2}\pi$.

$b \leq b^2 - a^2$ 时 $a^2 b^2 = b^2 + a^4$, 记 $a = \cos^{-1} x, b = (\cos x \sin x)^{-1}$.

即 $\sin x \leq \cos x (x \in [0, \pi/4])$ 时, $S = \pi/(\sin x \cos^2 x)$ 的最小值易得为 $S_{\min} = 2\sqrt{2}\pi$.

故包围圆 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 的椭圆的最小面积为 $S_{\min} = 2\sqrt{2}\pi$.

4. 解: 原积分 $= - \iiint_{\gamma} 2adydz + 2bdzdx + 2cdxdy = - (a^2 + b^2 + c^2)^{-0.5} \iiint_{\gamma} (a^2 + b^2 + c^2) ds$
 $= - (a^2 + b^2 + c^2)^{0.5} A.$

5. 解: $f'(x) = 1 - 2f(x) - 4x \int_0^x \exp(x^2 - t^2) f(t) dt = 1 - 2f(x) + 2x(f - x + 1),$

$$f'' = 2 - 4x + 2f + 2(x-1)f', f''' = 4f' + 2(x-1)f'' - 4,$$

$$f^{(n+1)} = 2(x-1)f^{(n)} + 2nf^{(n-1)}, f^{(n+1)}(1) = 2nf^{(n-1)}(1).$$

而 $f'(1) = 1, f''(1) = -2e^{-1}, f'''(1) = 0$, 故 $f^{(2n+1)}(1) = 0, n \geq 1,$

$$f^{(2n)}(1) = 2^{n-1}(2n-1) \cdots 3f''(1) = -2^n(2n-1)!!e^{-1}, n \geq 2.$$

二、解: $a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\} dx \geq \int_0^1 a_{n-1} dx = a_{n-1}$, 即 $\{a_n\}$ 单调增且 $a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$, 设 $0 \leq a_n \leq 1$, 则

$$0 \leq a_{n+1} = \int_0^1 \max\{a_n, x\} dx \leq \int_0^1 dx = 1, \text{即 } \{a_n\} \text{ 有界.}$$

可知 $\{a_n\}$ 收敛记其极限为 a , 有 $a = \int_0^1 \max\{a, x\} dx = \int_0^a a dx + \int_a^1 x dx = (1+a^2)/2, a = 1$.

三、证明: $\forall x$ 若 $f'(x) \neq 0$, 不妨设为 $f'(x) > 0$, 则 $\exists (a, b) \subset U(x)$, 其中 $U(x)$ 为 x 的某邻域, $\forall t \in (a, b)$, 有 $f'(t) > f'(x)/2$ 且 $|f''| \leq 1$, 可由拉格朗日中值定理知能取得 $b-a \geq f'(x)$, 或 $b-a = 1(f'(x) > 1$ 时), 即有 $(f'(x))^2/2 \leq \frac{f'(x)}{2}(b-a) = \int_a^b \frac{f'(x)}{2} dt < \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ 或 $f'(x)/2$

$< \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $a, b \rightarrow \infty$, 又因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

四、证明: (1) 因为 $\forall x, y, f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, 故 $f(x)$ 单调递增,

$\forall x \in (0, 1), \exists n \in N$, 使得 $1/2 < nx < 1$, 故 $nf(x) \leq f(nx) \leq f(1) = 1, f(x) \leq 1/n < 2x$.

(2) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{0.5} f(x) dx + \int_0^{0.5} f(1-x) dx \leq \int_0^{0.5} f(1) dx = 0.5$.

五、证明: 由条件, 存在 G 中有限个数, 不妨设为 $a_j, j = 1, 2, \dots, k$, 其最大公约数为 1.

本题即要证: 存在正整数 N , 当正整数 $n > N$ 时, 方程 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k = n$ 有非负整数解.

先证明: 若 a, b 的最大公约数为 1, $ax + by = n, n \geq ab$ 有非负整数解.

易知 $a, 2a, \dots, ab$ 被 b 除的余数都不相同, 则 n 必与某一 ma , 被 b 除的余数相同, 即 $n - ma$ 被 b 整除, $ax + by = n$ 有非负整数解.

若最大公约数为 (a, b) , 则 $ax + by = (a, b)n, n \geq ab/(a, b)$ 有非负整数解.

$ax + by + cz = (a_1 x + b_1 y)(a, b) + cz = n$, 有非负整数解 $(a, b, c$ 最大公约数为 1).

一般的, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k = n$ 有非负整数解, 对充分大的 n .

(工科类)

一、计算题

1. (解答见数学类第一题第 1 小题)

2. 解: $\frac{1}{(1+x^2)(2-2x+x^2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{2x+1}{1+x^2} - \frac{2x-3}{2-2x+x^2} \right)$,

故原积分 $= \frac{1}{5} (\ln(1+x^2) + \arctan x - \ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{5}$.

3. 解: 记 $f(B, C) = \sin(B+C) + \sin B + \sin C + \cos(B+C) - \cos B - \cos C$,

$f'_B(B, C) = \cos(B+C) + \cos B - \sin(B+C) + \sin B = 0$,

$f'_C(B, C) = \cos(B+C) + \cos C - \sin(B+C) + \sin C = 0$,

$\cos B + \sin B = \cos C + \sin C, B = C$ 或 $B+C = \pi/2$ (舍去).

$\cos(2B) + \cos B - \sin(2B) + \sin B = 0, B = \pi/3, A = C = B = \pi/3$.

$\max f(B, C) = 1.5(\sqrt{3}-1), \min f(B, C) = 1$.

4. (解答见数学类第一题第 4 小题)

5. 解: $f' = x^{-0.5} + f + 2x \int_0^x \exp(x^2 - t^2) f(t) dt = x^{-0.5} + f + 2x(f - x^{0.5})$

故 $f'(1) - 3f(1) = -1$.

二、(解答见数学类第二题)

三、解: $V = \int_0^{0.5} \pi r^2 ds = \int_0^{0.5} \pi t^3 \sqrt{1+4t^2} dt = \pi \int_0^{0.5} 4t^2 \sqrt{1+4t^2} d(4t^2+1)/32$

$= \frac{\pi}{32} \int_1^2 (t-1)\sqrt{t} dt = \frac{\pi}{32} \left(\frac{2}{5} t^{2.5} - \frac{2}{3} t^{1.5} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{120} (\sqrt{2}+1)$.

四、证明: $x \int_x^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt = \int_x^{+\infty} x \exp(-\frac{t^2}{2}) dt < \int_x^{+\infty} t \exp(-\frac{t^2}{2}) dt < \exp(-\frac{x^2}{2})$.

五、证明: $\tan x > x, (\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 1 + x^2, \tan x > x + x^3/3$,

易知 $\sin x > x - x^3/6$, 故 $\tan^2 x + 2\sin^2 x > 3x^2$.

(经管类)

一、计算题

1. 解: 原极限 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = e^{-1/4}.$

2. 解: 原积分 $= \int \left(\frac{e^x}{\cos^2 x} + \frac{e^x \sin x}{\cos x} \right) dx = \int e^x d \tan x + \int \frac{e^x \sin x}{\cos x} dx = e^x \tan x + c.$

3. (解答见工科类第一题第3小题)

4. 解: $\iint_D [x+y] dx dy = 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times 4 \times \frac{1}{2} + 3 \times 5 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{2} = 18.$

5. 解: $f' = 2x + f' + \int_0^x e^{-t} f'(t) dt = 2x + f' + f - x^2, f = -2x + x^2, f'(0) = -2.$

二、解: 设圆的半径为 r , 三角形边长为 a , 则有

$$2(n-2)r + 2r\sqrt{3} = a, r = \frac{a}{2(n-2) + 2\sqrt{3}}, A_n = \frac{\pi a^2}{(n-2+\sqrt{3})^2} \frac{n(n+1)}{8}, A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

三、证明: $f'(x) = e^x(P(x) + P'(x))$, 因为 $P(x) + P'(x)$ 是 5 次多项式, 必有零点, 设为 a .

若是 k 重零点, 则 $P(x) + P'(x) = (x-a)^k Q(x)$, $Q(x)$ 是 $5-k$ 次多项式且 $Q(a) \neq 0$,

若 k 是奇数, 当 x 经过 a 时 $f'(x)$ 改变符号, a 是 f 的极值点.

若 k 是偶数, $Q(x)$ 是 $5-k$ 次的, 可得 $Q(x)$ 必有一奇数重零点, f 必有极值点.

(2) $P(x) + P'(x)$ 的奇数重零点只能是奇数个, 因此 f 的极值点必是奇数个.

四、(解答见工科类第四题)

五、(解答见数学类第二题)

(文科与专科类)

一、计算题

1. 解: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \frac{1}{4} [\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))^2 - \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))^2] = 0.$

2. (解答见经管类第一题第2小题)

3. (解答见数学类第一题第3小题)

4. 解: $V = \int_{-1}^1 \pi(6-x^2)^2 dx - \pi \times 5^2 \times 2 = 14.4\pi.$

5. (解答见经管类第一题第5小题)

二、(解答见经管类第二题)

三、解: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_{-1}^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
 $= \frac{\pi+1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi+2}{4}.$

四、(解答见数学类第二题)

五、(解答见经管类第三题)

